



PRESIDENTE:  
Ettore Grecchi

DIRETTORE GENERALE:  
Dott. ing. Ettore Fanfani

DIRIGENTI:  
Dott. Ing. Marco Chiesa - VICE DIRETTORE  
Dott. Sergio Carniti  
Dott. Claudio Tarlocco

COLLABORAZIONI ESTERNE:

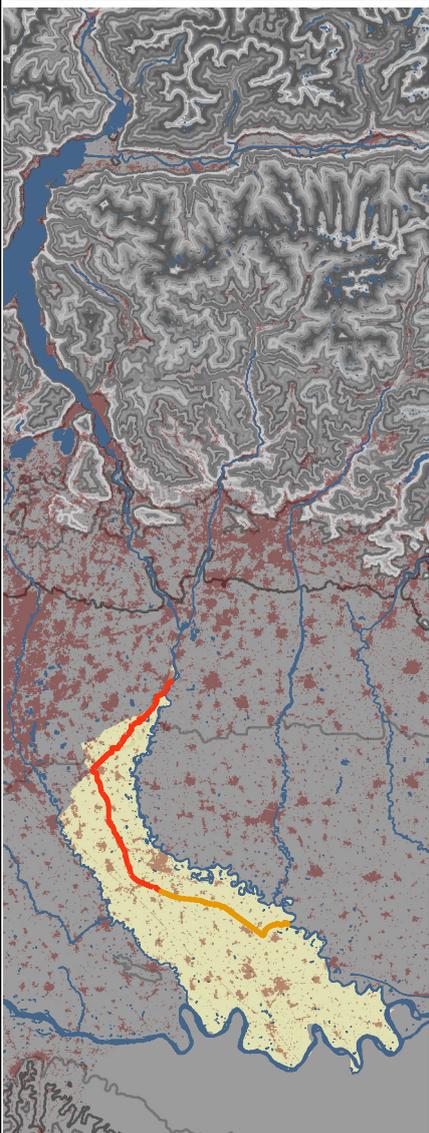


**Percorsi Sostenibili**  
Valutazioni ambientali territoriali e socio economiche

Studio Associato PERCORSI SOSTENIBILI  
via Volterra, 9  
20146 MILANO  
www.percorsisostenibili.com

## PIANO COMPRENSORIALE DI BONIFICA, DI IRRIGAZIONE E DI TUTELA DEL TERRITORIO RURALE

L.R. 5 dicembre 2008 n°31, art. 88 - D.G.R. 2 ottobre 2015 n° X/4110



DOCUMENTO DI PIANO

# APPENDICE Teoria del Bilancio Idrologico

EDIZIONE: GIUGNO 2018

AUTORITA' PROPONENTE: Dott. Ing. Marco Chiesa

AUTORITA' PROCEDENTE: Dott. Ing. Marco Chiesa

AUTORITA' COMPETENTE VAS: Dott. Sergio Carniti

ADOTTATO CON DEL. N° 81/799 DEL 28 GIUGNO 2018 DAL CONSIGLIO DI AMMINISTRAZIONE

RAPPORTO PRELIMINARE  
DI SCOPING

Prima Conferenza di VAS

26 luglio 2017

TAVOLI TECNICI  
IRRIGAZIONE E BONIFICA

12 febbraio 2018

DEPOSITO ATTI PRESSO  
UFFICI AUTORITA'  
PROCEDENTE

19 aprile 2018

Lodi, Via Nino Dall'Oro 4

VALUTAZIONE AMBIENTALE  
STRATEGICA DEL PIANO  
Seconda conferenza di  
valutazione  
seduta conclusiva

24 maggio 2018

PIANO COMPRENSORIALE



## SOMMARIO

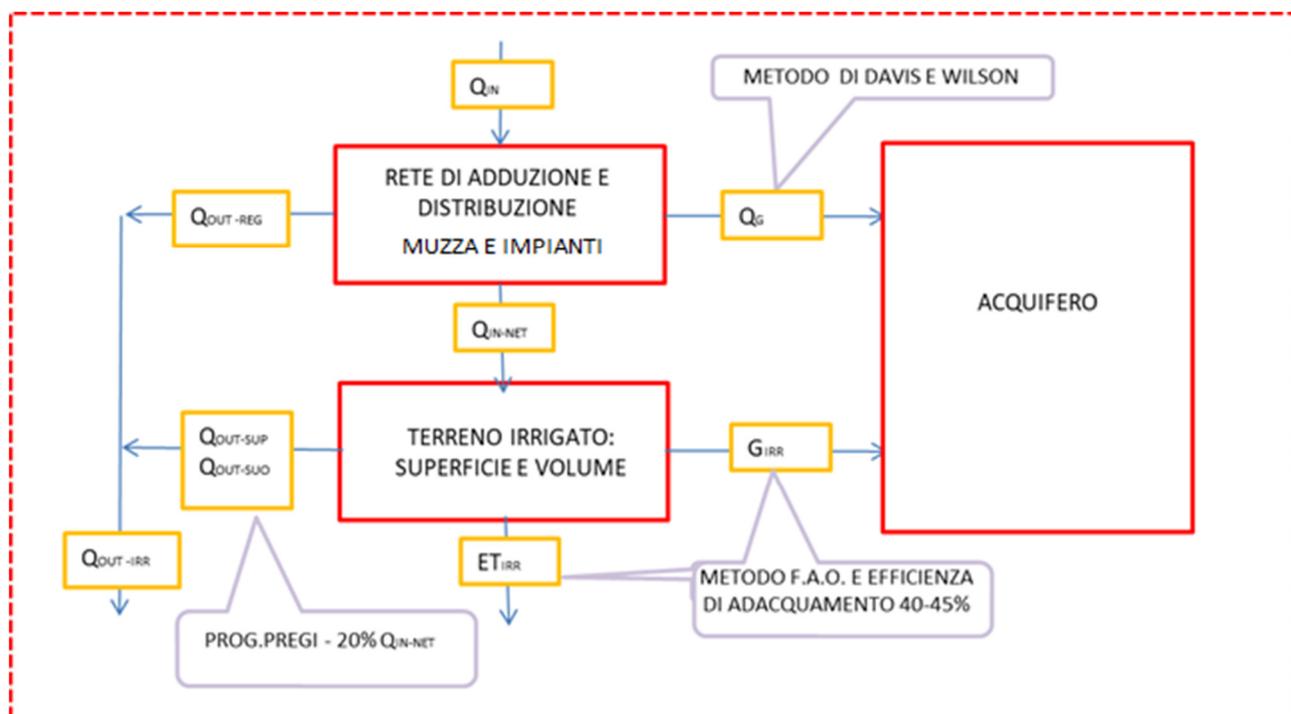
<i>1 Bilancio idrologico comprensoriale</i> .....	2
1.1 <i>Introduzione al bilancio e metodologia adottata</i> .....	2
1.2.1 <i>Analisi spaziale dei dati: il kriging</i> .....	3
1.2.1.1 <i>Definizione di spazi casuali e distribuzioni finito-dimensionali</i> .....	4
1.2.1.2 <i>Momenti e variogrammi di primo e secondo ordine di spazi di una variabile casuale</i> .....	5
1.2.1.3 <i>Analisi di spazi casuali</i> .....	6
1.2.1.4 <i>Spazi casuali stazionari</i> .....	7
1.2.1.5 <i>Teoremi di caratterizzazione e rappresentazione delle funzioni di variogramma</i> .....	8
1.2.1.6 <i>Misura di un errore e scala di computazione</i> .....	9
1.2.1.7 <i>Modelli di variogrammi isotropici</i> .....	9
1.2.1.8 <i>Stima del variogramma: stimatori empirici</i> .....	10
1.2.1.9 <i>Procedure di adattamento del variogramma utilizzando i minimi quadrati</i> .....	11
1.2.1.10 <i>Kriging ordinario</i> .....	12
1.2.1.11 <i>Kriging universale</i> .....	14
1.2.2 <i>Stima infiltrazione potenziale da precipitazione</i> .....	15
1.2.2.1 <i>Metodi teorici di stima dell' infiltrazione: l'equazione di Richards</i> .....	16
1.2.2.2 <i>Metodi empirici per la stima dell'infiltrazione: il modello di Horton</i> .....	17
1.2.2.3 <i>Stima dell'infiltrazione reale da precipitazione</i> .....	19
1.2.2.4 <i>Stima delle perdite di infiltrazione da canale - Formula di Davis e Wilson (1967)</i> .....	20
1.2.3 <i>Calcolo dell'evapotraspirazione</i> .....	22
1.2.3.1 <i>Fabbisogno irriguo della coltura</i> .....	22
1.2.3.2 <i>Determinazione dell'evapotraspirazione potenziale delle colture – Il modello FAO</i> .....	24
1.2.3.3 <i>Calcolo di <math>ET_{p0}</math> – L'equazione di Penman-Monteith</i> .....	25
1.2.3.4 <i>Calcolo di <math>ET_{p0}</math> – L'equazione di Penman-Monteith – modello FAO</i> .....	26
1.2.3.5 <i>Procedura calcolo parametri dell'equazione di Penman-Monteith – modello FAO</i> .....	27
1.2.3.6 <i>Calcolo di <math>ET_c</math> – Modello FAO</i> .....	31
1.2.3.7 <i>Traspirazione in condizioni di stress idrico</i> .....	34

## 1 Bilancio idrologico comprensoriale

La presente appendice tratta l'impostazione metodologica adottata nella definizione del bilancio idrologico comprensoriale. In particolare, al fine di stimare le componenti del bilancio, è stato necessario utilizzare diversi modelli di calcolo classici dell'idrologia e implementarli con una quantità rilevante di dati reperita in parte da informazioni territoriali note al Consorzio e in parte tramite fonti ufficiali (Arpa, ecc). Nel seguito di questa appendice verranno illustrati, con opportuni riferimenti bibliografici, gli schemi concettuali adottati e le impostazioni metodologiche sviluppate.

### 1.1 Introduzione al bilancio e metodologia adottata

Il bilancio idrologico all'interno del comprensorio è stato impostato riferendosi ad un volume di controllo corrispondente allo strato di suolo superficiale maggiormente interessato dai flussi idrologici coinvolti. Per il volume di controllo scelto sono stati computati i flussi in ingresso ed in uscita, la cui differenza deve essere compensata da una opportuna differenza (positiva o negativa) del termine di accumulo. Come descritto nella relazione generale il modello utilizzato (fig.1.1) per il comprensorio è un modello in grado di simulare il ciclo idrico dell'acqua tra lo strato di suolo delimitato superiormente dalle superfici dei territori irrigati ed inferiormente dalla profondità massima entro cui è ancora attivo l'attingimento da parte degli apparati radicali delle colture.



**Fig. 1.1 – Schema modello bilancio idrologico comprensoriale**

Per il calcolo dei termini in ingresso riportati in fig. 1.1, è stato necessario calcolare la quantità di acqua disponibile per l'irrigazione e il flusso di precipitazione medio al di sopra del territorio consortili. Per la determinazione di quest'ultimo si è proceduto all'interpolazione geostatistica dei dati puntuali misurati

nelle stazioni di monitoraggio di Arpa Lombardia elencate; mentre i dati medi della dotazione irrigua sono stati ricavati dalle misure giornaliere effettuate dal Consorzio (paragrafo 1.2.1). Infine, è stato applicato un opportuno modello di infiltrazione (paragrafo 1.2.2) per separare la componente di scorrimento superficiale e quella che penetra nel terreno. Per quanto riguarda i termini di flusso in uscita, invece, maggior elaborazioni sono state eseguite per definire il blocco evapotraspirativo, ed è stata necessaria sia una attenta spazializzazione delle variabili meteorologiche, rilevanti al fine del calcolo del bilancio energetico, sia l'applicazione di un modello che contemplasse i flussi di vapore d'acqua provenienti dal suolo e dalla traspirazione delle colture. Il modello impiegato per il calcolo dell'evapotraspirazione è quello proposto dalla FAO che tiene conto del bilancio colturale a livello di campo implementando l'effetto di componenti meteorologiche, di quelle relative allo stato della vegetazione e dell'influenza dello stato di umidità del terreno (stress idrico) e verrà descritto più dettagliatamente nel paragrafo 1.2.3.

### ***1.2.1 Analisi spaziale dei dati: il kriging***

Il kriging è uno strumento per effettuare previsioni spaziali che tiene conto della distanza e della correlazione tra i dati disponibili tramite una funzione denominata variogramma. Tale metodologia rientra nella generale categoria dei metodi geostatistici di previsione spaziale che, dati  $N$  punti  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  e dati i relativi valori  $z_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , permette di calcolare i valori di  $z$  tra gli  $N$  punti  $z_i$  noti.

La metodologia adottata tramite kriging per risolvere il problema geostatistico consiste in generale in:

- Previsione del più appropriato valore  $z_0$  per la quantità  $z$  al punto  $x_0$  diverso dai punti associati ai dati disponibili;
- Stima dell'incertezza della previsione  $z_0$  come funzione dell'incertezza sui dati disponibili  $z_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , e della loro relativa struttura di correlazione.

Il problema di interpolazione geostatistica è molto diverso dalle classiche metodologie di interpolazione disponibili in letteratura. Infatti, nelle interpolazioni classiche, si presuppone che i dati  $z_i$  siano campionati da una funzione  $z(x)$  che viene ricostruita dai dati sotto alcune assunzioni sulla natura della funzione interpolante  $\hat{z}$ . Ad esempio, per la classica interpolazione di Lagrange si assume che la funzione  $\hat{z}$  sia un polinomio, mentre nel metodo "Radial Basis Function Interpolation" (che ha molti aspetti tecnici somiglianti a Kriging) si presume che l'interpolatore sia una combinazione lineare di funzioni di forma (shape functions) con proprietà particolari. Inoltre, l'errore di approssimazione dipende dalla regolarità della funzione sottostante  $z$  e dei suoi derivati. Nella metodologia kriging, invece, la funzione interpolante viene comunque ipotizzata ma la variabile che la definisce risulta essere anche una casuale, adottando dunque diverse proprietà provenienti dalla statistica. In sostanza, le variabili definite con il metodo kriging sono

oggetti matematici che combinano le peculiarità delle caratteristiche delle variabili casuali e degli spazi scalari applicati all'insieme  $R^d$ .

Nei paragrafi successivi, verrà illustrata la metodologia kriging a partire da definizioni base necessarie ad inquadrarne i limiti di validità e il relativo campo di utilizzo.

### 1.2.1.1 Definizione di spazi casuali e distribuzioni finito-dimensionali

Uno spazio casuale è una funzione  $Z = Z(\omega, x)$  che descrive un numero reale  $Z$  per ogni coppia  $(\omega, x)$ ; dove  $\omega$  è un evento nel campo della probabilità  $(\Omega, P)$  e  $x \in R^d$  (nel seguito la dipendenza da  $\omega$  verrà omessa per semplicità).

Pertanto, uno spazio casuale è una funzione di diverse variabili reali che dipendono anche da elementi dello spazio delle probabilità.

Da un punto di vista probabilistico, il comportamento di uno spazio casuale è completamente determinato se è nota la computazione delle probabilità:

$$P[Z(x_1) \in (a_1, b_1), \dots, Z(x_N) \in (a_N, b_N)]$$

Dove  $a_i, b_i$  sono gli estremi di un intervallo arbitrario di una linea reale. Per ogni  $N$  e per ogni set di punti  $x_i, i = 1, \dots, N$  appartenenti ad  $N$ , la probabilità appena riportata è definita unicamente da un set di valori  $P_{(x_1, \dots, x_N)}[(a_1, b_1), \dots, (a_N, b_N)]$  che identifica la probabilità nello spazio  $R^N$ . Queste distribuzioni di probabilità sono chiamate "Distribuzioni finito-dimensionali" dello spazio della variabile casuale  $Z$ . Si osserva che la quantità definita dalla formula (2.1) sono simmetriche rispetto alla permutazione del set di punti  $x_i, i = 1, \dots, N$ .

Nel caso in cui gli spazi casuali con distribuzioni finito-dimensionali siano continui, per computare l'equazione appena riportata è sufficiente descrivere per ogni  $N$  e ogni set di punti di  $N$  corrispondente ad  $x_i = 1, \dots, N$  la densità di probabilità  $f_Z(u) = f_{(Z(x_1), \dots, Z(x_N))}(u_1, \dots, u_N)$ .

**Teorema 1 (Kolmogorov):** un set di distribuzioni di probabilità in  $R^N$ , definito come  $P_{(x_1, \dots, x_N)}([a_1, b_1], \dots, [a_N, b_N])$  per  $N \geq 1$  e simmetrico rispetto alla permutazione del set di punti  $x_i, i = 1, \dots, N$  determina unicamente la probabilità di ogni evento associato ad uno spazio della variabile casuale se si ha che:

$$P_{(x_1, \dots, x_N)}([a_1, b_1], \dots, [a_N, b_N]) = P[Z(x_1) \in (a_1, b_1), \dots, Z(x_N) \in (a_N, b_N)]$$

Un esempio importante di distribuzioni di probabilità che soddisfano il teorema appena riportato sono le gaussiane, rispetto le quali le distribuzioni finito-dimensionali sono definite da distribuzioni gaussiane multidimensionali aventi relativa densità per un generico set di punti  $x_i, i = 1, \dots, N$  pari a

$$f_z(u) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det(A)}} \exp \left\{ \frac{-(u-m)A^{-1}(u-m)}{2} \right\}$$

Nella quale  $m = (m(x_1), \dots, m(x_N))$  è un vettore di spostamenti spaziali di quantità dipendenti e  $A=A_{x_1, \dots, x_N}$  è una matrice simmetrica e definita positiva.

### 1.2.1.2 Momenti e variogrammi di primo e secondo ordine di spazi di una variabile casuale

La media e la varianza di uno spazio casuale sono definite tramite la classica definizione per le variabili casuali:

$$m(x) = E[Z(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} u f_{z(x)}(u) du$$

$$Var[Z(x)] = \sigma_z^2(x) = E[(Z(x) - m(x))^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (u - m(x))^2 f_{z(x)}(u) du$$

Il calcolo della media e della varianza implica solamente l'introduzione di distribuzioni monodimensionali. Altre quantità come la covarianza richiedono invece distribuzioni bidimensionali:

$$Cov[Z(x), Z(y)] = E[(Z(x) - m(x))(Z(y) - m(y))]$$

La covarianza è definita se esistono sia il primo che il secondo ordine di momenti di uno spazio casuale. Nel caso di spazi casuali gaussiani le cui distribuzioni finito-dimensionali sono descritte dall'equazione riportata precedentemente, il vettore  $m = (m(x_1), \dots, m(x_N))$  ha come componenti i valori medi di uno spazio casuale nei punti  $x_i, i = 1, \dots, N$  mentre la matrice  $A$  coefficienti  $a_{i,j} = Cov[Z(x_i)Z(x_j)]$ .

Oltre alle quantità appena descritte, proprie della statistica classica, il kriging richiede l'introduzione di un'ulteriore elemento definito variogramma. Questo è definito in uno spazio casuale  $Z(x)$  ed assume la seguente espressione:

$$Var[Z(x) - Z(y)]$$

La quantità

$$\gamma(x, y) = \frac{1}{2} Var[Z(x) - Z(y)]$$

È invece chiamata semivariogramma di  $Z$ . Nel caso in cui  $Z$  avesse media costante, è possibile definire equivalentemente il semivariogramma come:

$$\gamma(x, y) = \frac{1}{2} [(Z(x) - Z(y))^2]$$

Inoltre, se uno spazio casuale ha momento di secondo ordine finiti, sia il variogramma che la varianza esistono e tra loro sussiste la seguente relazione:

$$\text{Var}[Z(x) - Z(y)] = \text{Var}[Z(x)] + \text{Var}[Z(y)] - 2\text{Cov}[Z(x), Z(y)]$$

Momenti di ordine superiore al secondo possono essere calcolati con le stesse modalità definibili per le variabili casuali standard. Comunque, nella pratica, sono molto difficili da stimare dai dati a disposizione e in molte applicazioni i momenti di ordine superiore al secondo sono ottenibili solo per via numerica.

### 1.2.1.3 Analisi di spazi casuali

Uno spazio casuale  $Z = Z(\omega, x)$  è funzione di una variabile spaziale, pertanto è possibile introdurre i classici concetti di analisi (limiti, continuità e derivate) in funzione di come viene affrontata la dipendenza dallo spazio delle probabilità.

In questa trattazione verranno elencati definizioni di limiti per la convergenza spaziale puntuale di una sequenza di spazi casuali  $Z_n(\omega, x), n = 1, \dots, \infty$ . La stessa definizione può essere estesa a diversi tipi di convergenza nella variabile spaziale. Infine, sulla base della definizione di limite, è possibile definire la continuità e la differenziabilità.

**Convergenza puntuale in probabilità:** La sequenza  $Z_n(\omega, x), n = 1, \dots, \infty$  converge puntualmente in probabilità a  $Z(\omega, x)$  se per ogni  $\varepsilon > 0$  e per ogni  $x \in R^d$  si ha che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[|Z_n(\omega, x) - Z(\omega, x)| > \varepsilon] = 0$$

**Convergenza con probabilità unitaria:** La sequenza  $Z_n(\omega, x), n = 1, \dots, \infty$  converge puntualmente con probabilità unitaria a  $Z(\omega, x)$  se per ogni  $x \in R^d$  si ha che:

$$P \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} |Z_n(\omega, x) - Z(\omega, x)| = 0 \right] = 1$$

**Convergenza in varianza:** La sequenza  $Z_n(\omega, x), n = 1, \dots, \infty$  converge puntualmente in varianza a  $Z(\omega, x)$  se per ogni  $x \in R^d$  si ha che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[|Z_n(\omega, x) - Z(\omega, x)|^2] = 0$$

Si osserva che i concetti di convergenza appena introdotti non sono indipendenti tra di loro: per esempio, sia la convergenza in varianza che la convergenza con probabilità unitaria implicano la convergenza in probabilità.

**Continuità di spazi casuali:** Se esiste un  $\beta > 0$  tale che

$$E[(Z(x) - Z(y))^2] \leq C\|x - y\|^{2d+\beta}$$

allora lo spazio casuale  $Z(x)$  è continuo ed ha probabilità unitaria.

#### 1.2.1.4 Spazi casuali stazionari

L'interpolazione geostatistica può essere in generale introdotta indipendentemente da qualsiasi ipotesi relativa allo spazio casuale. Comunque, per conseguire una stima accettabile del semivariogramma senza richiedere una quantità di dati molto alta e che solitamente non è disponibile, sono necessarie alcune restrizioni sulla natura dello spazio casuale ammissibile.

**Spazi casuali stazionari:** uno spazio casuale è chiamato stazionario se per ogni vettore  $h \in R^d$  e per ogni set di punti  $x_i, i = 1, \dots, N$  si ha che

$$P[Z(x_1 + h) \in [a_1, b_1], \dots, Z(x_N + h) \in [a_N, b_N]] = P[Z(x_1) \in [a_1, b_1], \dots, Z(x_N) \in [a_N, b_N]]$$

La proprietà di stazionarietà appena riportata può essere riassunta dicendo che le distribuzioni finito-dimensionali di un campo stazionario sono invarianti rispetto alla traslazione. Di conseguenza, tutti i momenti puntuali  $E[Z(x)^k], k \geq 1$  risultano essere costanti. Inoltre, nel caso di esistenza della covarianza o del semivariogramma, essi dipendono soltanto dalla differenza tra i due punti nel quale lo spazio  $Z$  è valutato.

**Stazionarietà intrinseca degli spazi casuali:** uno spazio casuale è intrinsecamente stazionario se lo spazio del semivariogramma è solo una funzione della differenza tra due posizioni nelle quali l'incremento è calcolato; in pratica, se esiste uno scalare reale  $\gamma$  in  $R^d$ , si ha che

$$\gamma(x, y) = \gamma(x - y)$$

In generale, la classe di spazi casuali intrinsecamente stazionari è molto più grande degli spazi casuali stazionari. Inoltre, uno spazio stazionario è anche intrinsecamente stazionario.

**Secondo ordine di uno spazio casuale stazionario:** un campo casuale è chiamato stazionario del secondo ordine se lo spazio della covarianza esiste ed è solo funzione della differenza tra le due posizioni nelle quali l'incremento è calcolato; in pratica, se esiste uno scalare reale  $C$  in  $R^d$ , si ha che

$$C(x, y) = C(x - y)$$

Nel caso in cui uno spazio  $Z$  ha momenti di secondo ordine finiti costanti nello spazio, le ultime due definizioni sono equivalenti. In quest'ultimo caso, sostituendo una delle due equazioni nella definizione di variogramma, si ottiene che:

$$\gamma(x, y) = \text{Var}[Z(0)] + \text{Var}[Z(0)] - 2\text{Cov}[Z(x), Z(y)]$$

**Spazi casuali stazionari incrementati:** uno spazio casuale è stazionario incrementato se lo spazio degli incrementi  $Z(x) - Z(0)$  è stazionario.

Gli spazi casuali stazionari incrementati sono anche intrinsecamente stazionari.

**Spazi casuali stazionario isotropici:** uno spazio casuale intrinsecamente stazionario (di secondo ordine) è chiamato isotropico se, per ogni  $x, y \in R^d$  il semivariogramma (covarianza) dipende solamente dalla norma euclidea della differenza tra i due punti.

In pratica si ha che:

$$\gamma(x, y) = \gamma(\|x - y\|)$$

### 1.2.1.5 Teoremi di caratterizzazione e rappresentazione delle funzioni di variogramma

Nell'interpolazione geostatistica i variogrammi vengono stimati dai dati. Al fine di ricostruire la loro funzione forma (shape function), comunque, è necessario tenere in considerazione che appartengono ad una speciale classe di funzioni definite di seguito.

**Funzioni definite condizionatamente negative:** una funzione  $\varphi(x, y)$  è definita condizionatamente negativa se per ogni  $N \geq 2$ , dato  $x_i \in R^d$ ,  $i = 1, \dots, N$  e ogni set di numeri reali  $\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  tale che

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i = 0$$

e

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i \alpha_j \varphi(x_i, x_j) \leq 0$$

**Definibilità negativa condizionale dei variogrammi:** il semivariogramma di uno spazio casuale intrinsecamente stazionario è una funzione definita condizionatamente negativa.

Sia  $\gamma(\cdot)$  una funzione continua in  $R^d$  tale che  $\gamma(0) = 0$ . Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- $\gamma(\cdot)$  è definita condizionatamente negativa;
- Per ogni  $a > 0$ ,  $\exp(-a\gamma(\cdot))$  è definita positiva;
- Esiste una forma quadratica  $Q(\cdot) \geq 0$  ed una misura positiva  $G(\cdot)$  che è simmetrica, continua nell'origine e soddisfa  $\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + \|\omega\|^2)^{-1} G(d\omega) < +\infty$  tale che

$$\gamma(h) = Q(h) + \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos(\omega' h)}{\|\omega\|^2} G(d\omega)$$

La conseguenza di quanto appena scritto è il seguente teorema:

*Una funzione continua  $\varphi(x, y)$  che è definita condizionatamente negativa e tale che  $\varphi(x, y) = 0$  è il variogramma di uno spazio casuale intrinsecamente stazionario.*

I teoremi appena scritti implicano che, dato qualsiasi set di variogrammi  $\gamma_i, i = 1, \dots, m$  e coefficienti non negativi  $\alpha_i, i = 1, \dots, m$ , la combinazione lineare  $\gamma = \sum_{i=1}^m \alpha_i \gamma_i$  è anche il semivariogramma di un processo intrinsecamente stazionario.

### 1.2.1.6 Misura di un errore e scala di computazione

Dalla definizione di variogramma, è chiaro che per uno spazio casuale stazionario (in ogni senso) si ha che  $\gamma(0) = 0$ . Se il variogramma è assunto continuo nell'origine, dalla procedura geostatistica di interpolazione si ottiene un'esatta interpolazione dei dati noti nei punti in cui lo spazio è stato effettivamente indagato (misure sperimentali). Quanto appena scritto non è però valido in molti casi principalmente per due ragioni. Da una parte, questa metodologia non permette di includere misure di errore tra le incertezze che affliggono i dati: la misura dell'errore è in generale assunta spazialmente non correlata e non dovrebbe influenzare la struttura del variogramma per valori di  $h$  diversi da zero. Dall'altra parte, un altro effetto importante che non viene preso in considerazione se il variogramma è assunto continuo è l'"effetto nugget", che consiste nell'eventualità di improvvisi salti nel campo di valori su scala spaziale a valori che non sono stati completamente misurati dai dati disponibili. In molte applicazioni, però, è necessario ammettere la possibilità che anche vicino al punto di misura dello spazio casuale ricostruito si possano assumere valori differenti e indipendenti dal punto di misura stesso.

Per tenere conto degli effetti appena descritti, anche se concettualmente differenti, è sufficiente permettere una discontinuità del variogramma nell'origine. In particolare, se  $\lim_{h \rightarrow 0} \gamma(h) = C_0$ , (con  $C_0 \neq 0$ ), si afferma che il variogramma mostra l'effetto nugget.

### 1.2.1.7 Modelli di variogrammi isotropici

Nelle applicazioni del modello kriging disponibili in letteratura sono stati applicati un numero elevato di modelli isotropici di variogrammi. In tutti gli esempi, si definisce con  $\gamma_\theta(\cdot)$  il semivariogramma, avendo indicato con  $\theta$  il vettore delle variabili che determinano la forma del variogramma stesso.

In particolare, per i modelli di variogramma più comuni, si ha:

$$\theta = C_0, C_1, C_2$$

Nella quale:

$C_0$  è il parametro che definisce l'errore di nugget. Se il variogramma viene assunto discontinuo nell'origine, si ha che  $\lim_{h \rightarrow 0} \gamma(h) = C_0$

$C_1$  è il parametro chiamato "sill", che rappresenta  $\lim_{h \rightarrow \infty} \gamma(h) = +\infty$

$C_2$  rappresenta il *range* che corrisponde alla tipica scala spaziale associata alle variazioni significative della funzione variogramma

Tra i vari modelli di variogramma disponibili in letteratura si riporta per esempio quello gaussiano:

$$\gamma_\theta(h) = \begin{cases} 0 & h = 0 \\ C_0 + C_1 \left( 1 - \exp\left(-\frac{|h|^2}{C_2^2}\right) \right) & h \neq 0 \end{cases}$$

Con  $\theta = C_0, C_1, C_2, C_i \geq 0$  per  $i = 0, 1, 2$ .

Si osserva che gli spazi casuali con variogrammi gaussiani non devono essere necessariamente spazi casuali di tipo gaussiano. Questo perchè i variogrammi gaussiani implicano solamente forme di spazi casuali particolari ma che sono risultati essere non molto realistici per molte applicazioni reali e pertanto possono essere sostituiti con variogrammi più idonei alla tipologia di dati che si sta analizzando.

### 1.2.1.8 Stima del variogramma: stimatori empirici

Al fine di stimare il variogramma di uno spazio casuale intrinsecamente stazionario a partire dai dati sperimentali a disposizione, è necessario utilizzare uno dei modelli introdotti nel paragrafo precedente. A partire da questi, è possibile ricavare variogrammi chiamati "empirici"; che consistono in un discreto set di valori rispetto al quale un modello di variogramma ammissibile risulta essere adatto.

#### Stimatori empirici dei variogrammi

Considero un set finito di valori positivi  $h_k$ , con  $k = 1, \dots, K$ . Si ipotizza che questi valori siano ordinati in modo tale che  $h_k < h_{k+1}$  e che siano interpretati come la distanza assoluta dall'origine. Si introduce inoltre il valore positivo  $\delta_k$ ,  $k = 1, \dots, K$  in modo tale che gli intervalli  $\left[ h_k - \frac{\delta_k}{2}, h_k + \frac{\delta_k}{2} \right]$  risultino essere mutualmente disgiunti e ricoprenti un intervallo completo  $\left[ 0, h_k + \frac{\delta_k}{2} \right]$ . I valori  $\delta_k$  possono essere utilizzati per definire le seguenti classi di distanze:

$$N(h_k) = \left\{ (x_i, x_j) : h_k - \frac{\delta_k}{2} \leq \|x_i - x_j\| < h_k + \frac{\delta_k}{2} \delta_k \right\}$$

nella quale,  $x_i \in R^d, i = 1, \dots, N$  corrisponde, come nei paragrafi precedenti, ai punti nei quali i dati sono disponibili. Pertanto, la classe  $N(h_k)$  include tutte le coppie di punti di misura con distanza che ricade nell'intervallo  $\left[ h_k - \frac{\delta_k}{2}, h_k + \frac{\delta_k}{2} \right)$ .

In generale, è richiesto che le classi di distanza siano sufficientemente popolati in modo tale che la stima del variogramma sia significativa: in letteratura si suggerisce una numerosità  $N(h_k) \geq 30$ . Nel caso in cui

questa condizione non venga soddisfatta, andrebbero scelti nuovi valori di  $h_k$  al fine di garantire la significatività della stima del variogramma.

Tra i vari disponibili in letteratura, uno degli stimatori classici è quello di Matheron che è definito per  $k = 1, \dots, K$  come:

$$\hat{\gamma}^M(h_k) = \frac{1}{2N(h_k)} \sum_{N(h_k)} (Z(x_i) - Z(x_j))^2$$

Lo stimatore appena riportato è una delle forme più semplici disponibili in letteratura ed è uno dei più applicati; esso ha però un problema associato alla sensibilità rispetto alla presenza di valori anomali dei dati.

Un stimatore più robusto è stato proposto da Cressie e Hawkins. Questo è definito per  $k = 1, \dots, K$  come:

$$\hat{\gamma}^M(h_k) = \frac{1}{2\left(0,457 + \frac{0,494}{N(h_k)}\right)} \left( \frac{1}{N(h_k)} \sum_{N(h_k)} |Z(x_i) - Z(x_j)|^{\frac{1}{2}} \right)^4$$

Un altro stimatore alternativo è:

$$\hat{\gamma}^{med}(h) = \left[ med \left\{ |Z(x_i) - Z(x_j)|^{\frac{1}{2}} : (x_i, x_j) \in N(h) \right\} \right]^4 / 2B(h)$$

Nella quale  $med\{\cdot\}$  corrisponde alla mediana dei valori tra parentesi mentre  $B(h)$  è un correttore che tende al valore asintotico di 0,457.

### 1.2.1.9 Procedure di adattamento del variogramma utilizzando i minimi quadrati

Una volta stimato il variogramma empirico usando le tecniche viste nel paragrafo precedente è possibile adattare un modello di variogramma ai valori stimati. Più precisamente, indicando con  $\hat{\gamma}'(h)$  lo stimatore empirico e con  $\gamma(h; \theta)$  un modello valido di variogramma dipendente dal vettore dei parametri  $\theta$  ed utilizzando la procedura più semplice di adattamento conosciuta anche con il nome di “ordinary least square method”, è possibile computare il valore ottimale di  $\theta$  minimizzando la seguente espressione:

$$\sum_{k=1}^K \{\hat{\gamma}'(h_k) - \gamma(h_k; \theta)\}^2$$

L'espressione appena riportata consente un adattamento puramente geometrico e non utilizza alcuna informazione relativa alla distribuzione dello stimatore  $\hat{\gamma}'(h)$ . Quest'ultima è invece presa in considerazione nel cosiddetto “generalized least squares method”, che può essere definito come segue. Siano  $\hat{\gamma}'(h_k)$ ,  $k = 1, \dots, K$  i valori stimati dal variogramma empirico per un numero prefissato  $K$  di classi di distanza. Inoltre, assumendo che la funzione abbia a disposizione un numero di coppie sufficientemente

grande di dati per ogni classe di distanza (Cressie suggerisce di considerare solo le classi per le quali sono presenti almeno 30 coppie di dati), è possibile calcolare il vettore casuale  $2\hat{\gamma}' = (2\hat{\gamma}'(h_1), \dots, 2\hat{\gamma}'(h_K))^T$  e la relativa matrice di covarianza  $V = var(2\hat{\gamma}')$ . Detto questo, il “*generalized least squares method*” consiste nella determinazione del vettore dei parametri  $\theta$  che minimizza il seguente funzionale:

$$(2\hat{\gamma}'(h_1) - 2\gamma(\theta))^T V(\theta)^{-1} (2\hat{\gamma}'(h_1) - 2\gamma(\theta))$$

nella quale  $2\gamma(\theta) = (2\gamma(h_1; \theta), \dots, 2\gamma(h_K; \theta))^T$  è il modello teorico di variogramma da adattare, che viene valutato alle distanze  $h_1, \dots, h_K$ . Lo stimatore così ottenuto viene indicato come  $\theta'_\gamma$ .

Il “*generalized least squares method*” utilizza soltanto il secondo ordine di momenti dello stimatore di variogramma e non richiede nessuna assunzione sui dati della distribuzione. Dall'altra parte, la matrice di covarianza può essere complessa da derivare e la minimizzazione del funzionale potrebbe essere non semplice. Per questo motivo, è stata introdotta una procedura semplificata che si basa su considerazioni euristiche valide nel caso di spazi gaussiani  $Z$ . Questo metodo mostra che i termini extradiagonali di  $V$  possono essere disgiunti in prima approssimazione e che i termini diagonali possono essere approssimati da:

$$V_{j,j} \sim \frac{2(\gamma(h_j; \theta))^2}{|N(h_j)|}$$

Come conseguenza, uno stimatore del vettore dei parametri può essere ottenuto dalla minimizzazione del funzionale

$$\sum_{k=1}^K N(h_j) \left\{ \frac{\hat{\gamma}(h_j)}{\gamma(h_j; \theta)} - 1 \right\}^2$$

L'espressione appena scritta indica un criterio che attribuisce una maggiore importanza a classi di distanza  $h_j$  ben popolate per le quali  $N(h_j)$  è più grande. Questa approssimazione può anche essere considerata come il primo passo di una procedura iterativa in cui la minimizzazione del funzionale è ricercata tramite una sequenza  $\theta^k$  nella quale  $\theta^0$  è ottenuto minimizzando l'ultima equazione scritta e i seguenti  $\theta^k$  tramite la minimizzazione della seguente espressione:

$$(2\hat{\gamma}' - 2\gamma(\theta)){}^T V(\theta^{k-1})^{-1} (2\hat{\gamma}' - 2\gamma(\theta))$$

### 1.2.1.10 Kriging ordinario

Nel kriging ordinario i dati incogniti  $z_i$   $i = 1, \dots, N$ , sono interpretati come una realizzazione di uno spazio casuale intrinsecamente stazionario  $Z(x)$  avente media costante  $\mu$ . Quest'ultima è incognita mentre il semivariogramma deve essere necessariamente noto. Questo equivale ad assumere  $Z(x) = \mu + \delta(x)$ ,

nella quale  $\delta$  è uno spazio casuale avente media nulla. Detto questo, considerando la definizione di variogramma, è possibile scrivere che:

$$E[(Z(x) - Z(y))^2] = E[(\delta(x) - \delta(y))^2] = 2\gamma(x, y)$$

**Kriging ordinario:** dato un punto  $x_0$ , lo stimatore secondo il metodo kriging ordinario sulla base dei dati  $Z(x_i)$ , con  $i = 1, \dots, N$  è definito come uno stimatore corretto ed assume la seguente espressione

$$\hat{Z}(x_0) = \sum_{i=1}^N \lambda_i Z(x_i)$$

con  $Z(x_0)$  calcolato come il minimo scarto quadratico errore di previsione. Si può notare che l'ipotesi di correttezza corrisponde a richiedere che  $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$  dato che:

$$E[\hat{Z}(x_0)] = E\left[\sum_{i=1}^N \lambda_i Z(x_i)\right] = \sum_{i=1}^N \lambda_i E[Z(x_i)] = \mu \sum_{i=1}^N \lambda_i$$

che equivale a  $\mu = E[Z(x_0)]$  solo se i coefficienti della combinazione lineari hanno somma unitaria.

Al fine di derivare un'espressione per il calcolo dei coefficienti, si utilizza il metodo dei moltiplicatori di Lagrange che riduce il problema ad una minimizzazione non vincolata. In questo modo è possibile ottenere il seguente sistema lineare:

$$\Gamma_0 \lambda_0 = \gamma_0$$

Nella quale:

$$\lambda_0 = \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \dots \\ \lambda_N \\ \beta \end{bmatrix}; \gamma_0 = \begin{bmatrix} \gamma(x_0, x_1) \\ \dots \\ \gamma(x_0, x_N) \\ 1 \end{bmatrix};$$

mentre la matrice di sistema ha la seguente espressione:

$$\Gamma_0 = \begin{bmatrix} \gamma(x_1, x_1) & \gamma(x_1, x_2) & \dots & \gamma(x_1, x_N) & 1 \\ \gamma(x_2, x_1) & \gamma(x_2, x_2) & \dots & \gamma(x_2, x_N) & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \gamma(x_N, x_1) & \gamma(x_N, x_2) & \dots & \gamma(x_N, x_N) & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pertanto, i coefficienti del vettore  $\lambda_0$  possono essere determinati come segue:

$$\lambda_0 = \Gamma_0^{-1} \gamma_0$$

Si osserva che la soluzione  $\lambda_0$  fornisce due tipi di informazioni. A parte i valori dei coefficienti  $\lambda_i$ , con  $i = 1, \dots, N$ , la soluzione identifica anche il valore del moltiplicatore di Lagrange  $\beta$  che minimizza lo scarto quadratico dell'errore di previsione.

Infine, imponendo i valori dei coefficienti nell'espressione del funzionale, è possibile ricavare il valore dello scarto quadratico medio di previsione:

$$\sigma^2_{OK}(x_0) = \lambda_0^T \gamma_0 = \gamma_0^T \Gamma_0^{-1} \gamma_0$$

Questa espressione è chiamata anche "kriging variance" e rappresenta una stima dell'errore associata alla previsione.

### 1.2.1.11 Kriging universale

Nel kriging universale, i dati incogniti  $z_i$   $i = 1, \dots, N$ , sono interpretati come una realizzazione di uno spazio casuale che può essere scomposto nella somma di componenti deterministici e di uno spazio casuale intrinsecamente stazionario  $Z(x)$  avente media nulla nello spazio casuale. Questo corrisponde ad assumere  $Z(x) = \sum_{j=1}^p \beta_j f_j(x) + \delta(x)$ , nella quale  $\delta$  è lo spazio casuale a media nulla. La componente deterministica è invece rappresentata utilizzando funzioni di forma  $f_j$  che sono assunte note insieme al semivariogramma dello spazio casuale  $\delta$ , mentre i coefficienti  $\beta_j$  non sono necessari per formulare la previsione.

**Kriging universale:** dato un punto  $x_0$ , lo stimatore secondo il metodo kriging universale, sulla base dei dati  $Z(x_i)$  con  $i = 1, \dots, N$  è definito come uno stimatore corretto definito come segue

$$\hat{Z}(x_0) = \sum_{i=1}^N \lambda_i Z(x_i)$$

Con  $Z(x_0)$  calcolato con il minimo scarto quadratico errore di previsione.

E' possibile notare che imponendo  $p = 1$  e  $f_1 = 1$ , è possibile ottenere esattamente il kriging ordinario.

Introducendo la matrice:

$$X = \begin{bmatrix} f_1(x_1) & \dots & f_p(x_1) \\ f_1(x_2) & \dots & f_p(x_2) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_1(x_N) & \dots & f_p(x_N) \end{bmatrix}$$

e i vettori

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \dots \\ \beta_p \end{bmatrix}; \quad \delta = \begin{bmatrix} \delta(x_1) \\ \dots \\ \delta(x_N) \end{bmatrix}; \quad Z = \begin{bmatrix} Z(x_1) \\ \dots \\ Z(x_N) \end{bmatrix};$$

i dati del kriging universale possono essere riscritti come segue

$$Z = X\beta + \delta$$

che sottolinea la similitudine formale con il problema generale di stima lineare. Ripercorrendo gli stessi passaggi effettuati per il kriging ordinario ed utilizzando anche in questo caso i moltiplicatori di Lagrange, è possibile ottenere il seguente sistema lineare:

$$\Gamma_U \lambda_U = \gamma_U$$

Nella quale il vettore dei coefficienti delle incognite e quello dei termini noti è dato da:

$$\lambda_U = \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \dots \\ \lambda_N \\ \beta \end{bmatrix}; \quad \gamma_U = \begin{bmatrix} \gamma(x_0, x_1) \\ \dots \\ \gamma(x_0, x_N) \\ 1 \end{bmatrix};$$

e la matrice di sistema ha la seguente espressione:

$$\Gamma_U = \begin{bmatrix} \gamma(x_1, x_1) & \dots & \gamma(x_1, x_N) & f_1(x_1) & \dots & f_p(x_1) \\ \gamma(x_2, x_1) & \dots & \gamma(x_2, x_N) & f_1(x_2) & \dots & f_p(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma(x_N, x_1) & \dots & \gamma(x_N, x_N) & f_1(x_N) & \dots & f_p(x_N) \\ f_1(x_1) & \dots & f_1(x_N) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ f_p(x_1) & \dots & f_p(x_N) & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Pertanto, i coefficienti del vettore  $\lambda_0$  possono essere determinati come segue:

$$\lambda_U = \Gamma_U^{-1} \gamma_U$$

Analogamente a quanto visto con il kriging ordinario, è possibile calcolare l'errore tramite la seguente formulazione:

$$\sigma^2_{UK}(x_0) = \lambda_U^T \gamma_U = \gamma_U^T \Gamma_U^{-1} \gamma_U$$

La principale difficoltà nell'applicazione pratica del kriging universale risiede nel fatto che, se il variogramma non è noto e lo spazio casuale di definizione della variabile non ha media costante, significa che gli stimatori di variogrammi standard descritti precedentemente non sono più corretti e il variogramma non può più essere applicato se i coefficienti  $\beta_j$  non sono noti. Questi ultimi possono però essere stimati ipotizzando nota la varianza dello spazio  $\delta$ . In effetti, se la covarianza dei dati  $Z$  è nota ed è rappresentata da  $\Sigma$ , lo stimatore standard generalizzato conduce alla seguente formulazione dei valori  $\beta_j$ :

$$\beta_{gls} = (X^T \Sigma^{-1} X)^{-1} X^T \Sigma^{-1} Z$$

Tuttavia la covarianza dei dati, supponendo che esista, è in realtà correlata al variogramma. Questo comporta una circolarità delle ipotesi necessarie per la stima del variogramma che può essere risolta in diversi modi, ciascuno dei quali presenta però problemi pratici.

### 1.2.2 Stima infiltrazione potenziale da precipitazione

Con il termine infiltrazione si definisce il trasferimento dell'acqua dalla superficie del terreno verso gli strati interni del terreno stesso; tale trasferimento dipende dalla tessitura del terreno e dalle condizioni idrauliche dall'acqua presente in superficie.

Fisicamente il fenomeno dell'infiltrazione può essere schematizzato come una successione di più fasi:

- Ingresso della pioggia nella superficie del suolo;
- Propagazione della stessa attraverso la tessitura del suolo;
- Saturazione dei vuoti presenti all'interno del mezzo.

Se l'intensità di pioggia è inferiore alla capacità d'infiltrazione, questa coinciderà con la pioggia stessa; nel caso contrario l'infiltrazione coinciderà con la capacità di infiltrazione e l'eccesso di pioggia rispetto a questa darà luogo al deflusso superficiale.

Le grandezze di interesse per la modellazione dell'infiltrazione sono le seguenti:

- Infiltrazione: velocità con cui l'acqua viene sottratta dalla superficie del suolo [L/T];

- Capacità d'infiltrazione: massima velocità con cui un suolo, in qualsiasi condizione, è capace di assorbire acqua [L/T].

Da quanto appena esposto risulta evidente che il valore della capacità d'infiltrazione dei diversi suoli nelle varie condizioni sia di fondamentale importanza. Infatti, la capacità d'infiltrazione non dipende solo dalla tessitura del terreno ma anche dallo stato dello strato superficiale di questo e, istante per istante, dallo spessore di suolo saturato d'acqua.

Per modellare l'andamento temporale della capacità d'infiltrazione del terreno e dunque stimare la quota parte di precipitazione che effettivamente si infila nel terreno, vi sono in generale due differenti approcci:

- Equazione di Richards: interpretazione teorica del fenomeno dell'infiltrazione;
- Modellazione empirica del fenomeno.

### *1.2.2.1 Metodi teorici di stima dell'infiltrazione: l'equazione di Richards*

L'approccio teorico schematizza il processo di infiltrazione come moto di percolazione principalmente verticale in un mezzo poroso non saturo. Dal punto di vista matematico, le equazioni che governano il moto sono: equazione di continuità e equazione del moto.

Applicando dapprima l'equazione di continuità ad un parallelepipedo infinitesimo con base orizzontale, considerando il liquido incomprimibile ed indicando con  $\vartheta$ ,  $V$  e  $z$  rispettivamente il contenuto di umidità del suolo (espresso come frazione del volume totale), la velocità media (intesa come rapporto tra la portata e la sezione trasversale dell'intero ammasso filtrante) e con  $z$  la coordinata relativa all'asse verticale (con direzione positiva verso l'alto), si ottiene:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

Per quanto riguarda l'equazione del moto si ipotizza la variazione della velocità secondo la legge di Darcy. Quest'ultima è stata originariamente introdotta per descrivere il moto di filtrazione in un mezzo saturo ed è rappresentata dalla relazione:

$$V = -K \frac{\partial H}{\partial z}$$

Nella quale  $V$  è la velocità di filtrazione,  $K$  la permeabilità del mezzo e  $H$  il carico totale (la cui derivata lungo l'asse verticale  $z$ , che nel caso considerato è uguale e opposta alla derivata nella direzione e nel verso del moto, rappresenta la perdita di energia per unità di peso del liquido e per unità di percorso). Il carico totale  $H$  si assume pari alla somma della quota geodetica e dell'altezza piezometrica; l'altezza cinetica risulta invece essere trascurabile.

Come scritto precedentemente, l'equazione di Darcy è valida per moti in mezzi saturi (moti di filtrazione) nei quali la permeabilità  $K$  assume un valore costante. In un mezzo non saturo, invece, la permeabilità  $K$  cresce all'aumentare del contenuto di umidità del suolo e pertanto se si assume la validità dell'equazione di Darcy per mezzi non saturi è necessario far dipendere la permeabilità dal contenuto d'acqua  $\vartheta$ .

Per quanto concerne la stima dell'altezza piezometrica, che per un mezzo saturo si misura con un piezometro, nel caso di un mezzo poroso non saturo nel quale le condizioni di pressione sono essenzialmente dettate dalla tensione superficiale si misura con un *tensiometro*, che quantifica il *carico di suzione*  $\psi$  (decescente all'aumentare del contenuto di umidità del suolo  $\vartheta$ ) che, assunto per definizione come positivo, è uguale e contrario all'altezza piezometrica relativa che è invece negativa.

Definito  $\psi$ , il carico totale risulta dunque essere pari a:

$$H = z - \psi$$

Sostituendo quest'ultima nell'equazione del moto si ottiene:

$$V = -K(\theta) \frac{\partial(z - \psi)}{\partial z}$$

Ed effettuando le sostituzioni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial z} &= \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \\ -K \frac{\partial \psi}{\partial \theta} &= D \end{aligned}$$

Si ottiene che:

$$\frac{\partial \theta(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ D \frac{\partial \theta(z, t)}{\partial z} + K \right]$$

Il termine  $D$  appena introdotto è un coefficiente e prende il nome di diffusività.

Al fine di integrare l'equazione di Richards è necessario definire le condizioni iniziali riguardanti il contenuto d'acqua nel terreno lungo la verticale e le condizioni al contorno superiore ( $z = 0$ ) e inferiore ( $z \rightarrow \infty$ ).

Inoltre, è necessario conoscere ad ogni istante temporale i termini  $K(\vartheta)$ ,  $D(\vartheta)$ . Le difficoltà legate alla conoscenza dei parametri appena citati e la complessità dell'integrazione numerica rendono ardua l'applicazione dell'equazione di Richards. Per questo motivo, sono state introdotte schematizzazioni più semplificate del fenomeno dell'infiltrazione al fine di ottenere una stima pratica anche se approssimata del volume infiltrato.

### 1.2.2.2 Metodi empirici per la stima dell'infiltrazione: il modello di Horton

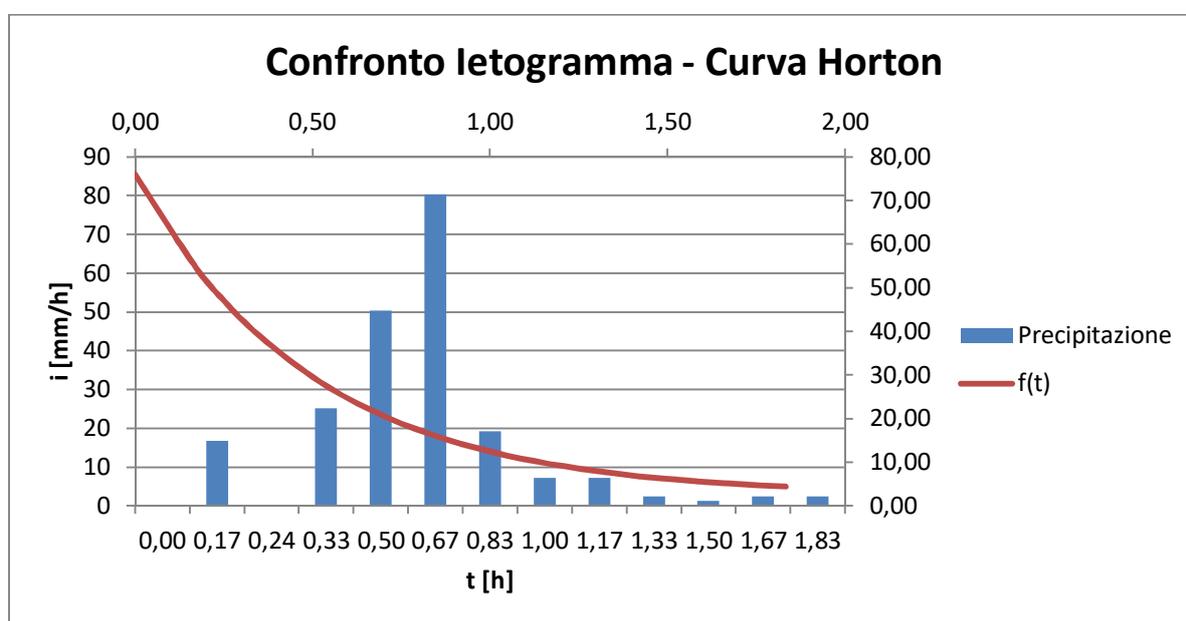
Nel metodo sviluppato da Horton [Horton, 1940] si ipotizza che la variazione della capacità d'infiltrazione  $f$  [L/T] sia in ogni istante proporzionale alla differenza tra la capacità attuale e la capacità d'infiltrazione asintotica  $f_c$  tramite la relazione:

$$\frac{df}{dt} = -k(f - f_c)$$

Nella quale  $k$  [1/T] è una costante legata alla rapidità della diminuzione della capacità di infiltrazione ed è quindi funzione delle caratteristiche del terreno. Indicando poi con  $f_0$  la capacità d'infiltrazione all'istante iniziale  $t=0$ , dall'integrazione dell'equazione precedente si ottiene la seguente espressione:

$$f = f_c + (f_0 - f_c)e^{-kt}$$

L'equazione di Horton riportata indica l'andamento nel tempo del tasso di infiltrazione potenziale  $f$  nell'ipotesi che l'intensità di pioggia sia sempre sufficiente a garantire che il tasso d'infiltrazione reale sia almeno pari a quello di infiltrazione potenziale. Inoltre, le costanti  $f_0$ ,  $f_c$ ,  $k$  esprimono rispettivamente la capacità di penetrazione della pioggia nella superficie del suolo, la velocità di propagazione attraverso gli strati saturi del terreno e la velocità con cui quest'ultimo si satura nel tempo in relazione alla specifica tessitura. In fig.1.2 è riportato il confronto tra la capacità potenziale di infiltrazione definita dal modello di Horton e lo ietogramma di un evento di precipitazione relativo al bacino 1b.



**Fig. 1.2 – Confronto tra curva potenziale di Horton ed evento di precipitazione del bacino 1b**

Ai fini pratici, i valori dei parametri utilizzati per il calcolo dei parametri del bilancio idrologico sono stati presi dalla definizione del *Soil Conservation Service (SCS)*, il quale indica i valori delle costanti in funzione della tipologia del suolo. Nelle tabelle successive si riporta la classificazione e i relativi valori dei parametri.

*Tabella 1.1 – Classifica della permeabilità dei suoli secondo il Soil Conservation Service*

Tipo	Descrizione
	<i>Scarsa potenzialità di deflusso</i>
A	Comprende forti spessori di sabbie con scarsissimo limo e argille; anche forti spessori di ghiaie profonde, molto permeabili. <i>Potenzialità di deflusso moderatamente bassa</i>
B	Comprende la maggior parte degli strati sabbiosi meno spessi che nel gruppo A, ma il gruppo nel suo insieme mantiene alte capacità d'infiltrazione anche a saturazione.

*Potenzialità di deflusso moderatamente alta*

- C Comprende suoli sottili e suoli contenenti considerevoli quantità di argilla e colloidali, anche se meno che nel gruppo D. Il gruppo ha scarsa capacità d'infiltrazione.

*Potenzialità di deflusso molto alta*

- D Comprende la maggior parte delle argille con alta capacità di rigonfiamento, ma anche suoli sottili con orizzonti pressoché impermeabili in vicinanza della superficie.

Tabella 1.2 – Valori dei parametri d'infiltrazione dell'equazione di Horton proposti dal Soil Conservation Service

Tipo di suolo	$f_0$ [mm/h]	$f_c$ [mm/h]	$h$ [1/h]
A	250	25,4	2
B	200	12,7	2
C	125	6,3	2
D	76	2,5	2

Nel caso di pioggia d'intensità sempre superiore alla capacità d'infiltrazione, l'altezza  $F$  [mm] complessivamente infiltratasi fino all'istante  $t$  risulta:

$$F = \int_0^t f dt = f_c t + \frac{(f_0 - f_c)(1 - e^{-kt})}{k}$$

I termini indicati nell'equazione appena scritta sono tutte "capacità" d'infiltrazione; pertanto affinché l'andamento temporale sia effettivamente pari a quello indicato, l'intensità di precipitazione deve essere in ogni istante superiore alla capacità d'infiltrazione.

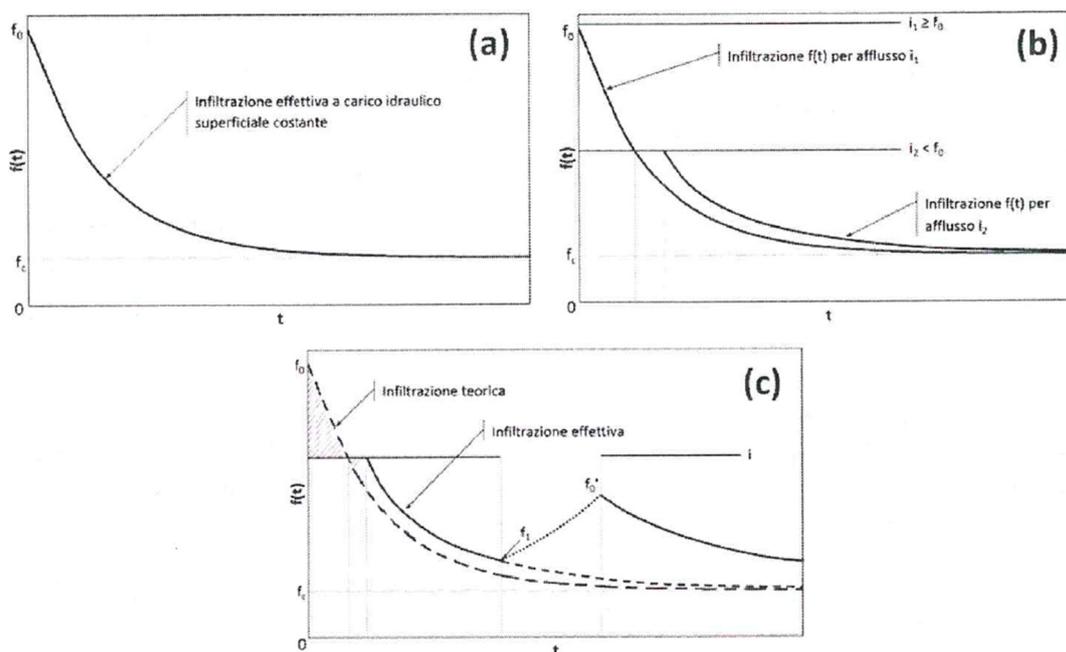
### 1.2.2.3 Stima dell'infiltrazione reale da precipitazione

Definita la capacità d'infiltrazione del terreno tramite l'equazione di Richards o il modello di Horton, la quantità d'acqua che effettivamente si infila nel terreno ( $f_r$ ) si ricava dal confronto tra l'infiltrazione potenziale e l'intensità di pioggia  $i$ .

Se in superficie è presente una portata affluente costante  $i$  anziché un carico idraulico costante, possono determinarsi due casi a seconda che  $i$  sia maggiore o minore di  $f_0$ :

- $i \geq f_0$ : l'infiltrazione  $f_r(t)$  ha un andamento decrescente da  $f_0$  ad  $f_c$  secondo l'equazione di  $f$  (fig. 1.3 a);
- $i < f_0$ : l'infiltrazione resta costante e pari ad  $i$  per una fase iniziale, fino a che, raggiunta la saturazione superficiale, inizia a decrescere con rapidità dipendente dal valore di  $i$  raggiunto in quel passo temporale, portandosi infine al valore asintotico  $f_c$  (fig. 1.3 b).

Nel caso in cui l'afflusso dovesse interrompersi temporaneamente per poi ricominciare dopo un breve intervallo temporale, l'infiltrazione assume un nuovo valore iniziale  $f_0'$  che, per effetto del parziale svuotamento degli strati superficiali e del conseguente recupero di capacità di infiltrazione, è maggiore del valore di  $f$  manifestato al termine del primo periodo di afflusso (fig. 1.3 c).



**Fig. 1.3 – Andamento dell’infiltrazione: a) infiltrazione effettiva a carico idraulico superficiale costante; b) infiltrazione effettiva per afflusso superficiale costante; c) infiltrazione effettiva per afflusso superficiale discontinuo [p.286 – Becciu, Paoletti: “Fondamenti di costruzioni idrauliche”]**

A conclusione del paragrafo si osserva che, soprattutto all’inizio di un evento meteorico, se la capacità d’infiltrazione fornita dalla curva di Horton risulta essere superiore all’intensità di precipitazione per un certo periodo per poi diminuire rapidamente fino a diventare inferiore, il suolo conserva una capacità d’infiltrazione indicata dall’equazione di  $f$  poiché non è stata soddisfatta tutta la precedente capacità per mancanza di afflusso. In questo caso, la capacità d’infiltrazione effettiva si ottiene trasladando orizzontalmente la curva di Horton in modo tale che, quando la curva d’infiltrazione interseca lo ietogramma, il volume di pioggia caduto fino a quell’istante sia pari a quello potenzialmente infiltrabile sotteso dalla curva stessa. Si osserva che, a favore di sicurezza, si è assunto che il tempo richiesto per saturare lo strato superficiale del terreno  $t_p$  sia trascurabile, sovrastimando dunque la porzione di precipitazione che defluisce superficialmente di una quantità pari ad  $i \cdot t_p$ .

#### 1.2.2.4 Stima delle perdite di infiltrazione da canale - Formula di Davis e Wilson (1967)

Le perdite per infiltrazione da un canale dipendono sia dalla permeabilità del terreno, che dalla differenza di livello tra il pelo libero del canale e la quota piezometrica della falda. Per una stima accurata di tale elemento del bilancio sono necessarie indagini in loco ripetute nelle diverse condizioni.

In mancanza di informazioni di dettaglio, per valutazioni di massima possono essere impiegate formulazioni empiriche. Il dipartimento di scienze della terra dell'Università di Torino, su richiesta di Regione Piemonte, ha proposto varie formulazioni empiriche al fine di quantificare le perdite per infiltrazione. Tra queste si è scelto di applicare la formula di Davis e Wilson per via della migliore applicabilità rispetto ai dati a disposizione.

### **Formula di Davis e Wilson (1967)**

Con questa formulazione le perdite di un canale rivestito vengono calcolate secondo la seguente formulazione:

$$Q = 0,45 * k * \frac{C * L * \sqrt[3]{h}}{4 * 10^6 + 365 * \sqrt{v}} \quad [m^3/s]$$

Nella quale:

- C* contorno bagnato dell'alveo [m]
- L* lunghezza del canale [m]
- h* tirante d'acqua [m]
- v* velocità media dell'acqua [m/s]
- k* coefficiente di infiltrazione da assegnare in base al tipo di alveo

Il valore del coefficiente *k* da utilizzare nella formula di Davis e Wilson (1967) dipende dal tipo di terreno costituente l'alveo ed è riportato nella seguente tabella.

Tabella 1.3 – valori del coefficiente *k* in funzione del tipo di terreno costituente l'alveo

TIPI DI ALVEO	<i>k</i> [-]
Rivestimento in calcestruzzo (spessore > 7 cm)	1
Rivestimento bituminoso di piccolo spessore	5
Alveo naturale in terreno argilloso	12
Alveo naturale in terreno limoso – argilloso	15
Alveo naturale in terreno limoso – sabbioso	30
Alveo naturale in terreno sabbioso	40
Alveo naturale in terreno sabbioso - ghiaioso	70

Il valore *k* è stato calcolato tramite una media pesata sulla base della tipologia di alveo presente nel territorio consortile; alvei per la maggior parte sabbiosi con basse percentuali di limo e argilla.

### 1.2.3 Calcolo dell'evapotraspirazione

Per definizione l'evapotraspirazione è una grandezza fisica usata in agrometeorologia che corrisponde alla quantità d'acqua che dal terreno passa nell'aria allo stato di vapore per effetto congiunto della traspirazione attraverso le piante ed evaporazione dal terreno. L'evapotraspirazione dipende dagli stessi fattori da cui dipendono l'evaporazione e la traspirazione delle piante: è funzione delle condizioni climatiche e della disponibilità di acqua presente nel terreno. In particolare, nel caso in cui il contenuto idrico nel suolo sia almeno pari alla quantità d'acqua che può essere trasformata in vapore dal complesso dei fattori atmosferici e della vegetazione, l'evapotraspirazione prende il nome di *evapotraspirazione potenziale (ETp)*, che costituisce la massima quantità d'acqua che una coltura è in grado di evapotraspirare. L'*evapotraspirazione reale (ETr)* è in genere minore dell'*ETp* e quest'ultima ne costituisce il limite superiore.

Il calcolo dell'evapotraspirazione può essere effettuato seguendo procedimenti empirici oppure tramite prove sperimentali che prevedono l'utilizzo di uno o più strumenti (es. lisimetro).

In questo caso, data la mancanza di prove sperimentali rilevanti, si è scelto di seguire il metodo proposto dalla FAO (Food and Agriculture Organization) in quanto risulta essere uno dei più utilizzati in letteratura.

Il metodo FAO è stato applicato sulla base dell'elaborazione dei dati medi climatici ricavati dal sito ARPA delle varie stazioni di monitoraggio presenti sul territorio del comprensorio e relativi agli anni 2006-2016.

Nei paragrafi successivi verranno illustrati i passaggi effettuati per la stima dell'*ETr*; termine che è stato in seguito inserito nel bilancio idrico comprensoriale.

#### 1.2.3.1 Fabbisogno irriguo della coltura

La coltivazione di una generica coltura richiede la stima del fabbisogno idrico in modo da quantificare l'effettiva necessità di irrigazione. Quest'ultimo è in generale funzione del periodo di maturazione della pianta e pertanto al fine di stimare tale termine è necessario studiare il comportamento della pianta durante tutta la fase di sviluppo.

In termini di evapotraspirazione, il rendimento delle colture è massimo quando, per l'intera stagione colturale, è massima la traspirazione, dalla quale dipende in modo essenziale lo sviluppo delle piante. A parità di altre condizioni, la quantità d'acqua che l'apparato radicale estrae dal suolo è massima quando il contenuto d'acqua uguaglia la capacità di ritenzione del terreno (definita capacità di campo). Quando il contenuto d'acqua diminuisce, diminuiscono anche la traspirazione e l'evaporazione dalla superficie del terreno. Dunque il rendimento delle colture è massimo se l'evapotraspirazione raggiunge il valore massimo,

uguale all'evapotraspirazione potenziale. L'andamento del rendimento della coltura è strettamente legato al contenuto d'acqua del suolo; in generale questo rimane al di sotto di quello ottimale per intere stagioni ed a volte poi è così basso che certe colture risulterebbero del tutto impossibili. L'acqua necessaria per alimentare il fenomeno della traspirazione è fornita in modo naturale dalle precipitazioni. Quest'ultima non è però sempre sufficiente a soddisfare i fabbisogni delle colture. Pertanto, per aumentare il rendimento delle colture o anche soltanto renderle possibili, è necessario aumentare artificialmente il contenuto d'acqua del suolo per mezzo dell'irrigazione.

Una volta incrementato il contenuto d'acqua nel terreno, la quantità d'acqua che le radici delle piante riescono ad estrarre dal terreno è solo una quota parte di quella fornita in ingresso al campo per mezzo della precipitazione e dell'irrigazione. Infatti, non tutta l'acqua che si infiltra nel suolo risulta utile per il soddisfacimento delle necessità della vegetazione: alla traspirazione si accompagna necessariamente una perdita d'acqua per evaporazione del terreno umido ed una parte dell'acqua di pioggia va inevitabilmente perduta per intercezione, per evaporazione, per scorrimento superficiale dai limiti del campo e per percolazione al di là dello spessore utile di captazione delle radici della pianta.

Questi fenomeni prendono il nome di perdite e dipendono dal tipo di terreno, dalle modalità di irrigazione e dal regime pluviometrico. A causa delle perdite, solo una parte delle precipitazioni e dell'acqua fornita per irrigazione risulta utile per il soddisfacimento delle necessità della vegetazione.

Tenendo presente quanto appena scritto, il fabbisogno irriguo colturale viene calcolato applicando l'equazione di continuità su un volume di controllo di un certo appezzamento di terreno coltivato per una profondità pari a quella di massima captazione delle radici. Esplicitando i vari termini introdotti precedentemente, l'equazione di continuità assume la seguente formulazione:

$$ET = P_e + I_n - \Delta V_u$$

Nella quale:

$ET$	evapotraspirazione reale [L]
$P_e$	precipitazione efficace [L]
$I_n$	irrigazione netta [L]
$\Delta V_u$	deficit di volume irriguo necessario per raggiungere l' $ET_p$ [L]

Per  $P_e$  si intende la parte delle precipitazioni che, non andando perduta nell'evaporazione, per scorrimento o per percolazione, risulti utile ai fini agricoli.

La variazione di volume  $\Delta V_u$  invece, se negativa, rappresenta il contributo dato dall'evapotraspirazione dalla riserva d'acqua nel terreno; se positiva, il contributo dato dalla riserva d'acqua della pioggia efficace e dall'irrigazione netta.

Poiché lo scopo dell'irrigazione è di massimizzare il rendimento della coltura, ai fini del calcolo del contributo di irrigazione netto da fornire  $I_n$  sia pari all'evapotraspirazione potenziale  $ET_p$  (che, definita come somma delle quantità d'acqua perduta dalle piante per traspirazione e dal terreno per evaporazione, prende il nome di *fabbisogno d'acqua della coltura*). Dato che l'evapotraspirazione è massima quando l'umidità del terreno è pari alla capacità di campo, l'assunzione che  $ET$  uguagli  $ET_p$  implica che la differenza di volume  $\Delta V_u$  sia nulla. Pertanto, modificando l'equazione di continuità secondo l'ipotesi di massimizzazione della crescita colturale,  $I_n$  risulta essere pari a:

$$I_n = ET_p - P_e$$

La parte dell'irrigazione  $I_n$  utile a soddisfare il fabbisogno d'acqua della coltura prende il nome di *fabbisogno irriguo netto*.

Infine, dividendo il fabbisogno irriguo netto per un coefficiente di rendimento (rendimento di campo) che tiene conto delle varie perdite elencate precedentemente, si ottiene il fabbisogno irriguo della coltura.

Dividendo infine il fabbisogno irriguo all'ingresso del campo per un secondo coefficiente di rendimento (rendimento di distribuzione), che tiene conto delle perdite nei canali, si ottiene infine il fabbisogno irriguo all'opera di presa.

### ***1.2.3.2 Determinazione dell'evapotraspirazione potenziale delle colture - Il modello FAO***

La valutazione dell'evapotraspirazione potenziale ( $ET_p$ ) dipende principalmente dal tipo di coltura che si sta analizzando ma anche da fattori meteorologici. L'insieme delle variabili determina l'energia necessaria per la vaporizzazione ed i meccanismi di trasporto atmosferico che rimuovono il vapore acqueo dalla superficie di evaporazione. Per quanto riguarda le grandezze prese in considerazione per la valutazione del fenomeno, esse sono: radiazione solare, temperatura, umidità e velocità del vento.

Ai fini calcolo dell' $ET_p$ , invece, si è deciso di adottare il modello FAO che prevede due fasi distinte. In un primo momento si calcola l'evapotraspirazione potenziale di riferimento  $ET_{p0}$  che corrisponde all'evapotraspirazione potenziale di una coltura campione scelta ed in un secondo momento A partire da  $ET_{p0}$  si determina poi l' $ET_p$  della coltura di interesse moltiplicando quest'ultima per un coefficiente reso disponibile dalla stessa FAO che varia in funzione del tipo di coltura, del punto di maturazione della pianta e della posizione del territorio oggetto di studio. Il modello FAO definisce la coltura di riferimento come: "un'ipotetica coltura con un'altezza di 0.12 m, una resistenza fissata  $r_{sv} = 70 \text{ sm}^{-1}$  ed un albedo pari a 0,23, il cui comportamento sia influenzato dai soli parametri climatici". Dalla definizione appena citata, è chiaro che con  $ET_{p0}$  è possibile tenere conto del solo effetto del clima sull'evapotraspirazione.

### 1.2.3.3 Calcolo di $ET_{p0}$ – L'equazione di Penman-Monteith

Nel 1948, Penman combinò il bilancio energetico con il metodo di trasferimento di massa e derivò un'equazione per calcolare l'evaporazione da una superficie d'acqua libera dalle registrazioni climatologiche standard di sole, temperatura, umidità e velocità del vento.

In sostanza l'evapotraspirazione è stata valutata come somma di resistenze dovute in parte alla pianta e in parte al suolo. Nel modello di Penman, i parametri di resistenza si distinguono in resistenza aerodinamica e superficiale. I parametri di resistenza superficiale sono spesso combinati in un parametro, chiamato parametro di resistenza di massa della superficie ( $r_s$ ), il quale opera in serie alla resistenza aerodinamica. Fisicamente la resistenza superficiale descrive la resistenza del flusso di vapore attraverso le aperture degli stomi (stomatal flux), l'area totale delle foglie (cuticular flux) e la superficie del suolo (soil flux).

La resistenza aerodinamica ( $r_a$ ), invece, descrive la resistenza della vegetazione al passaggio del flusso d'aria (air flow) valutando l'attrito dell'aria che scorre sulle superfici vegetative. In fig. 1.4 si riporta la rappresentazione grafica delle resistenze appena descritte.

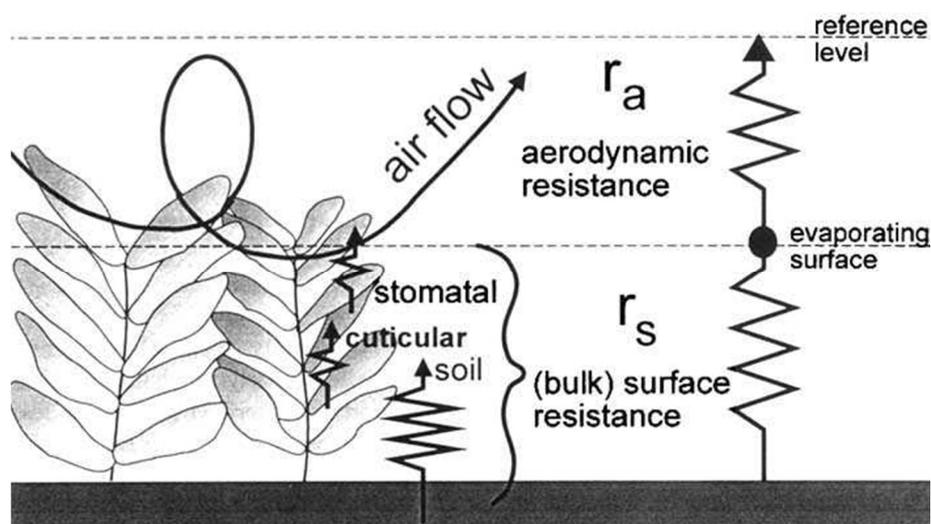


Fig. 1.4 – Rappresentazione schematica della resistenza aerodinamica ( $r_a$ ) e superficiale di massa ( $r_s$ )

A partire da queste considerazioni, l'equazione di Penman-Monteith assume la seguente espressione:

$$\lambda ET = \frac{\Delta(R_n - G) + \rho_a c_p \frac{(e_s - e_a)}{r_a}}{\Delta + \gamma \left(1 + \frac{r_s}{r_a}\right)}$$

Nella quale:

- $R_n$  radiazione netta sulla superficie della pianta
- $G$  flusso di calore verso il terreno
- $(e_s - e_a)$  deficit di pressione di vapore nell'aria rispetto alla saturazione
- $\rho_a$  densità media dell'aria a pressione costante

$c_p$	calore specifico dell'aria
$\Delta$	pendenza della curva della pressione di vapore in funzione della temperatura
$\gamma$	costante psicometrica
$r_s$	resistenza della superficie
$r_a$	resistenza dell'aria

#### 1.2.3.4 Calcolo di $ET_{P0}$ - L'equazione di Penman-Monteith - modello FAO

Il calcolo di  $ET_{P0}$  del modello FAO riprende la formulazione originale dell'equazione di Penman inserendo i parametri relativi alla coltura di riferimento scelta dagli esperti, che viene definita da un'altezza di 0,12 m, un  $r_s$  di  $70 \text{ s m}^{-1}$  e un albedo di 0,23, un'evaporazione e un'estensione della superficie verde di altezza uniforme e una crescita in condizioni ottimali di adacquamento. In fig. 1.5 si riporta uno schema visivo delle caratteristiche della coltivazione di riferimento proposta dalla FAO.

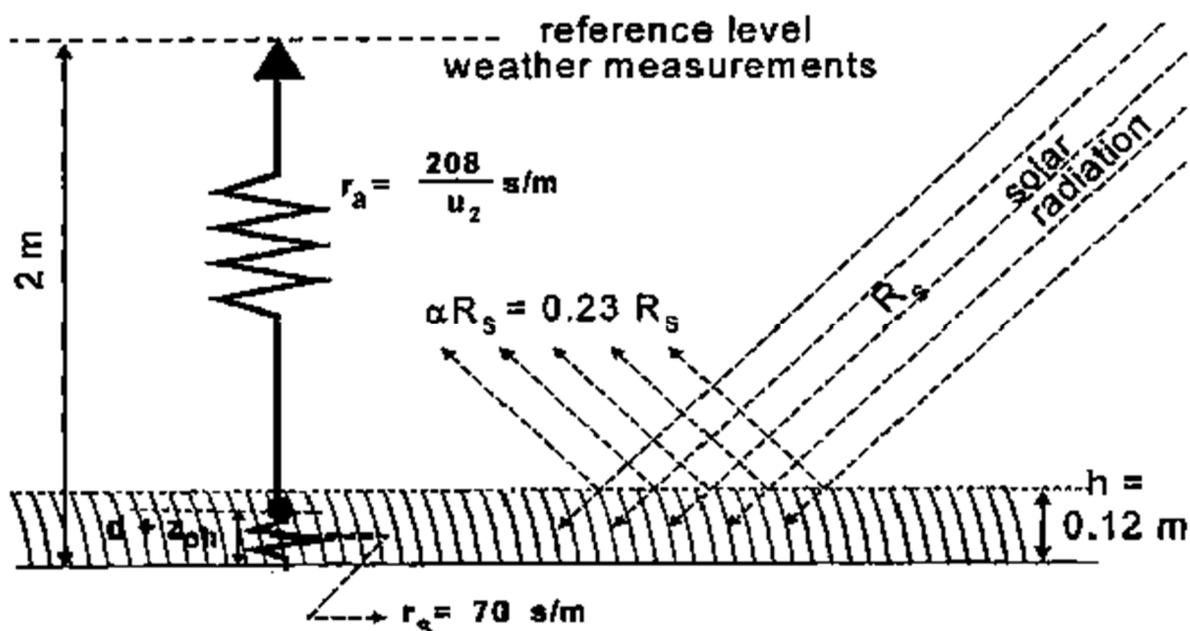


Fig. 1.5 – Caratteristiche dell'ipotetica coltura di riferimento – modello FAO

Sostituendo nell'equazione di Penman-Monteith le espressioni relative ai parametri  $r_s$  ed  $r_a$  (che verranno riportate successivamente), si ottiene la formulazione di Penman-Monteith indicata nel modello FAO:

$$ET_{P0} = \frac{0.408\Delta(R_n - G) + \gamma \frac{900}{T + 273} u_2 (e_s - e_a)}{\Delta + \gamma(1 + 0,34 u_2)}$$

Nella quale:

$ET_{P0}$  evapotraspirazione potenziale di riferimento [ $\text{mm day}^{-1}$ ]

$R_n$	radiazione netta sulla superficie della pianta [ $\text{MJ m}^{-2} \text{ day}^{-1}$ ]
$G$	flusso di calore verso il terreno [ $\text{MJ m}^{-2} \text{ day}^{-1}$ ]
$(e_s - e_a)$	deficit di pressione di vapore nell'aria rispetto alla saturazione [kPa]
$\Delta$	pendenza della curva della pressione di vapore in funzione della temperatura [ $\text{kPa } ^\circ\text{C}^{-1}$ ]
$\gamma$	costante psicrometrica [ $\text{kPa } ^\circ\text{C}^{-1}$ ]
$T$	temperatura media giornaliera dell'aria ad un'altezza di 2 m [ $^\circ\text{C}$ ]

### 1.2.3.5 Procedura calcolo parametri dell'equazione di Penman-Monteith - modello FAO

#### Resistenza aerodinamica ( $r_a$ )

Il trasferimento del calore e del vapore acqueo dalla superficie di evaporazione all'aria al di sopra della pianta è determinata dalla resistenza aerodinamica:

$$r_a = \frac{\ln \left[ \frac{z_m - d}{z_{om}} \right] \ln \left[ \frac{z_h - d}{z_{oh}} \right]}{k^2 u_z}$$

Nella quale:

$r_a$	resistenza aerodinamica [ $\text{s m}^{-1}$ ]
$z_m$	quota di misura della velocità del vento [m]
$z_{om}$	lunghezza d'attrito per il trasporto della quantità di moto [m]
$z_h$	quota di misura dell'umidità [m]
$z_{oh}$	lunghezza d'attrito per il trasporto di vapore [m]
$D$	altezza della pianta dopo allettamento [m]
$u_z$	velocità del vento misurata alla quota $z$ [ $\text{m s}^{-1}$ ]
$k$	costante di von Karman's, pari a 0,41 [-]

#### Resistenza della superficie ( $r_s$ )

La resistenza dovuta alla superficie comprende quella dovuta al flusso di vapore attraverso la traspirazione della pianta e l'evaporazione dalla superficie del terreno vera e propria. Nel caso in cui la vegetazione non coprisse completamente il suolo nel fattore di resistenza andrebbero inclusi gli effetti dell'evaporazione dalla superficie del suolo. Se invece la pianta non sta traspirando a livelli potenziali, la resistenza dipende anche dallo stato di umidità della stessa e quindi dal contenuto di acqua presente nel terreno.

Tenendo presente quanto appena scritto e le difficoltà della stima di questo parametro, il modello FAO per il calcolo della resistenza di superficie propone la seguente formulazione:

$$r_s = \frac{r_l}{LAI_{active}}$$

Nella quale:

$r_s$  resistenza della superficie [ $s\ m^{-1}$ ]

$r_l$  resistenza superficiale della foglia in condizioni di illuminazione ottimale [ $s\ m^{-1}$ ]

$LAI_{active}$  Leaf Area Index attivo che corrisponde all'area delle foglie che effettivamente contribuisce allo scambio superficiale di calore e di vapore, generalmente calcolato rispetto alla porzione superiore della superficie vegetale illuminata dal sole [ $m^2(\text{foglia})\ m^{-2}(\text{superficie del suolo})$ ]

I valori di  $LAI_{active}$  variano in funzione della coltivazione e dello stato di maturazione della pianta raggiungendo il valore massimo in prossimità del periodo di fioritura. Anche in questo caso la FAO indica un'espressione generale per il calcolo di  $LAI_{active}$ :

$$LAI_{active} = 0.5\ LAI$$

In sostanza quest'ultima assume che solo la metà superiore della coltura contribuisce attivamente allo scambio di calore e vapore (Fig. 1.6)

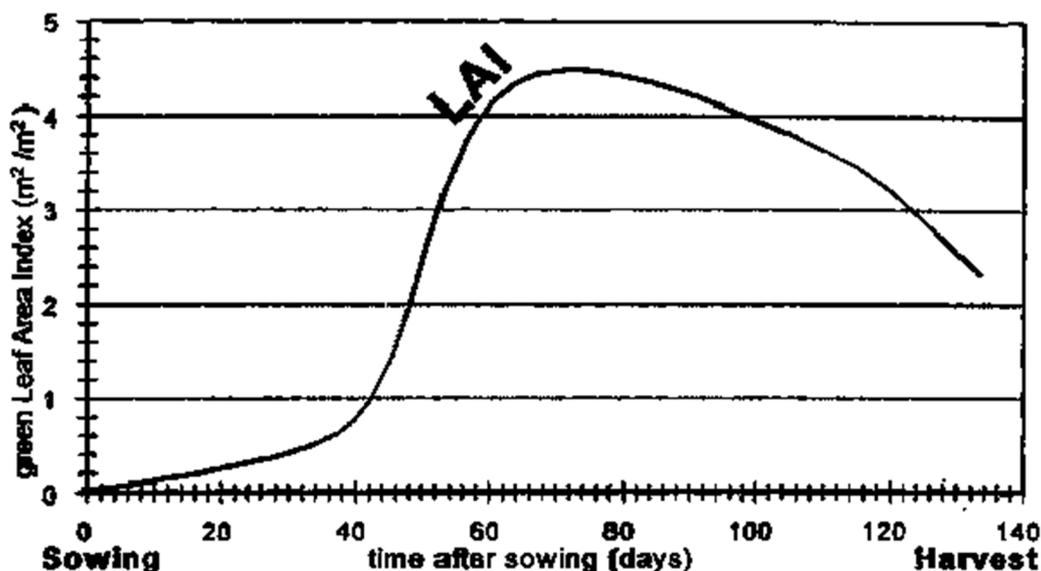


Fig. 1.6 – Rappresentazione tipica della variazione del LAI durante il periodo di maturazione del mais (FAO)

### **Pressione atmosferica**

$$P = 101300 \left( \frac{293 - 0,0065 z}{293} \right)^{5,26}$$

Fornisce i valori in Pascal in funzione della quota  $z$  rispetto al livello del mare.

### **Calore latente di vaporizzazione**

E' un termine che quantifica la richiesta per trasformare una unità di massa d'acqua dallo stato liquido in vapore a temperatura e pressione costante:  $\lambda = 2,45 \cdot 10^6 \text{ J kg}^{-1}$ .

### **Costante psicometrica**

La costante psicometrica è calcolata come segue:

$$\gamma = \frac{c_p P}{\epsilon \lambda}$$

Nella quale  $c_p = 1,013 \cdot 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$  e  $\epsilon = 0,622$ .

### **Pressione parziale di vapore alla saturazione**

$$e^0(T) = 0,6108 \exp \left[ \frac{17,27 T}{T + 237,3} \right]$$

Nella quale  $e^0(T)$  rappresenta la pressione di vapore dell'aria alla temperatura  $T$  [kPa].

### **Pressione di vapore media giornaliera**

E' possibile calcolare questo parametro come la media tra i valori assunti in corrispondenza di temperatura minima e massima:

$$e^* = \frac{e^*(T_{max}) + e^*(T_{min})}{2}$$

### **Pendenza della curva della pressione di vapore alla saturazione**

$$\Delta = \frac{4098 \left[ 0,6108 \exp \left[ \frac{17,27 T}{T + 237,3} \right] \right]}{(T + 237,3)^2}$$

Nella quale  $\Delta$  è la pendenza della curva della pressione di vapore alla saturazione alla temperatura  $T$  che invece è la temperatura dell'aria [°C].

### **Pressione parziale di vapore**

Nel caso in cui non fossero disponibili misure di  $e_a$ , questa può essere stimata in funzione dell'umidità relativa minima e massima secondo la seguente espressione:

$$e_a = \frac{e^*(T_{max})RH_{min}/100 + e^*(T_{min})RH_{max}/100}{2}$$

### **Radiazione extraterrestre**

$$R_a = \frac{24(60)}{\pi} G_{sc} d_r [\omega_s \sin(\varphi) \sin(\delta) + \cos(\varphi) \cos(\delta) \sin(\omega_s)]$$

Nella quale  $R_a$  è la radiazione extraterrestre corrispondente alla quantità di energia che giunge su di una ipotetica superficie esterna all'atmosfera [ $\text{MJ m}^{-2} \text{day}^{-1}$ ];  $G_{sc}$  è la costante solare pari a  $0,0820 \text{ MJ m}^{-2} \text{min}^{-1}$ ;  $d_r$  è l'inverso della distanza relativa sole-terra;  $\varphi$  è la latitudine [rad].

Seguono le formule dei parametri appena citati.

$$d_r = 1 + 0,033 \cos\left(\frac{2\pi J}{365}\right)$$

$$\omega_s = \cos^{-1}[-\text{tg}(\varphi)\text{tg}(\delta)]$$

$$\delta = 0,409 \sin\left(\frac{2\pi}{365} D - 1,39\right)$$

### **Radiazione netta solare**

$$R_{ns} = (1 - \alpha)R_s$$

Nella quale  $R_s$  è la radiazione solare misurata [ $\text{MJ m}^{-2} \text{day}^{-1}$ ] mentre  $\alpha$  è l'albedo.

### **Radiazione netta di onda lunga**

$$R_{nl} = \sigma \left[ \frac{T_{\max|K}^4 + T_{\min|K}^4}{2} \right] (0,34 - 0,14\sqrt{e_a}) \left( 1,35 \frac{R_s}{R_{s0}} - 0,35 \right)$$

Nella quale  $\sigma = 5,5576 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$  e:

$$R_{s0} = (0,75 + 2 \cdot 10^{-5}z)R_a$$

### **Radiazione netta totale**

$$R_n = R_{ns} - R_{nl}$$

### **Flusso di calore terrestre**

Esistono modelli complessi per descrivere il flusso di calore terrestre. Dato che questo termine è particolarmente piccolo se confrontato con la radiazione netta, soprattutto quando la superficie è coperta dalla vegetazione, è possibile assumere per passi temporali giornalieri  $G=0$ .

#### **1.2.3.6 Calcolo di $ET_c$ – Modello FAO**

Noto il valore di  $ET_{p0}$ , è possibile calcolare il valore dell'evapotraspirazione potenziale delle varie colture in condizioni standard ( $ET_c$ ) moltiplicando il valore di  $ET_{p0}$  per un coefficiente  $k_c$  specifico per ogni coltura e variabile in base alla fase di maturazione della pianta e che consente di tenere in considerazione le specificità della coltura in termini di clima e caratteristiche fisiche della tipologia di pianta stessa rispetto alla coltura di riferimento.

Il modello FAO permette di calcolare  $k_c$  tramite due differenti metodologie: la prima consiste nel valutare  $k_c$  come un unico coefficiente mentre la seconda discerne i contributi dovuti all'evaporazione ed alla traspirazione. Tra le due metodologie proposte si è scelto di utilizzare la seconda, che ha la seguente espressione:

$$k_c = k_{cb} + k_e$$

Nella quale:

$k_{cb}$	coefficiente riferito alla coltura
$k_e$	coefficiente riferito all'evaporazione dal suolo

E di conseguenza:

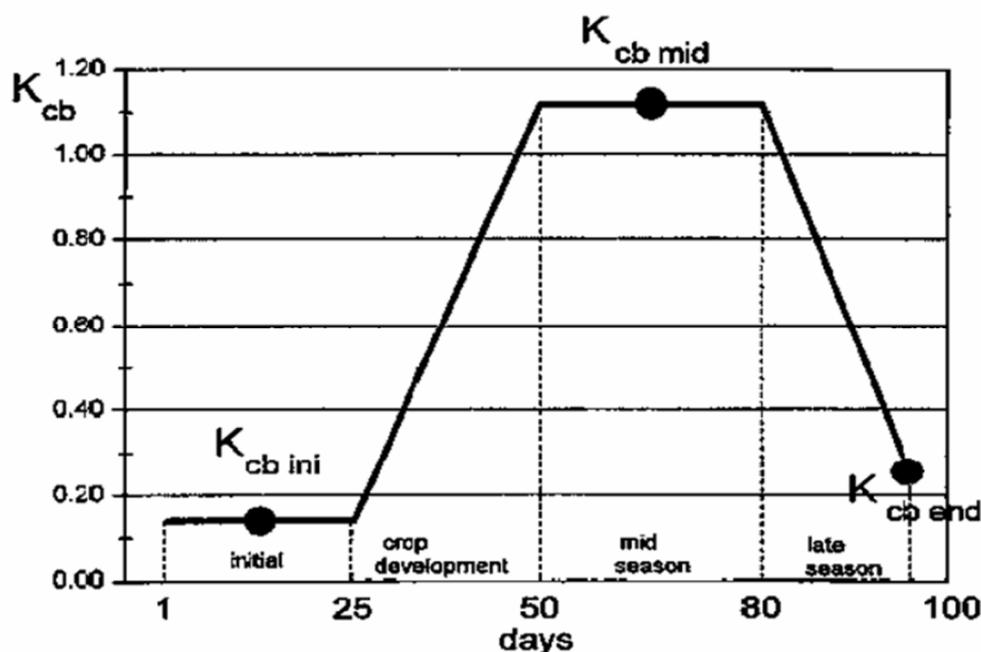
$$ET_c = (k_{cb} + k_e)ET_0$$

Si osserva che la somma dei termini appena descritti non può in alcun modo eccedere il valore massimo dato dall'energia disponibile; inoltre il calcolo del coefficiente  $k_e$  richiede un bilancio giornaliero di volume per la determinazione del contenuto d'acqua nello strato collaborante del terreno.

### **Coefficiente di traspirazione $k_{cb}$**

È definito come il rapporto tra  $ET_c$  ed  $ET_0$  considerando superficie del suolo secca e contenuto idrico della zona interessata dalle radici adeguato a sostenere una completa traspirazione della pianta. In sostanza  $k_{cb}$  rappresenta la componente di evapotraspirazione potenziale in assenza degli effetti aggiuntivi dell'inumidimento del suolo mediante irrigazione o precipitazione.

Il valore del coefficiente  $k_{cb}$  è ricavabile da abachi forniti dalla stessa FAO durante le varie fasi di crescita tramite i quali si giunge alla costruzione della curva  $k_{cb}$ . In fig. 1.7 ne è riportato un esempio.



**Fig. 1.7 – Esempio della curva  $k_{cb}$  per la soia utilizzando lunghezze delle fasi di crescita di 25, 25, 30 e 20 giorni**

I valori di  $k_{cb\ mid}$  e  $k_{cb\ end}$ , nel caso in cui l'umidità relativa minima giornaliera differisca del 45% o la velocità del vento dia diversa da 2 m/s, devono essere corretti mediante la seguente equazione:

$$k_{cb} = k_{cb(tab)} + [0,04(u_2 - 2) - 0,004(RH_{min} - 45)] \left(\frac{h}{3}\right)^{0,3}$$

Nella quale  $h$  rappresenta la massima altezza della pianta durante il periodo di maturazione della pianta considerato.

### **Coefficiente di evaporazione $k_e$**

E' la componente di evaporazione proveniente dalla superficie del suolo. Se in seguito ad una precipitazione o ad un'irrigazione il suolo è umido,  $k_e$  potrebbe essere elevato ma in ogni caso la somma di  $k_{cb}$  e  $k_e$  non può eccedere un valore massimo  $k_{c\ max}$  determinato dall'energia disponibile per l'evapotraspirazione sulla superficie del suolo.

Nel momento in cui all'interno del suolo non c'è più acqua disponibile per l'evaporazione la superficie del suolo diventa secca,  $k_e$  diminuisce e tende a zero.

Il valore di  $k_e$  è calcolabile tramite la seguente formula:

$$k_e = k_r(k_{c\ max} - k_{cb}) \leq (f_{ew} k_{c\ max})$$

Nella quale:

- $k_r$  coefficiente adimensionale di riduzione dell'evaporazione dipendente dalla profondità nel suolo dell'acqua che evapora
- $f_{ew}$  frazione di suolo che è esposta e bagnata
- $k_{c\ max}$  massimo valore di  $k_c$  in seguito ad una precipitazione o ad una irrigazione

Quest'ultimo è funzione delle variabili climatiche e del coefficiente colturale  $k_{cb}$  secondo la seguente formula:

$$k_{c\ max} = \max \left( \left\{ 1,2 + [0,04(u_2 - 2) - 0,004(RH_{min} - 45)] \left( \frac{h}{3} \right)^{0,3} \right\}; \{k_{cb} + 0,05\} \right)$$

Nella quale  $h$  rappresenta la massima altezza della pianta durante il periodo di maturazione della pianta considerato.

Per quanto riguarda  $k_r$ , il suo valore dipende dalla quantità d'acqua disponibile presente nel terreno. Se la quantità d'acqua è sufficiente per l'evapotraspirazione potenziale allora ha valore massimo e il fattore limitante per l'incremento dell'evapotraspirazione è l'energia proveniente dal sole. Se invece la quantità d'acqua risulta essere il fattore limitante, il valore di  $k_r$  decresce fino a raggiungere valore nullo nel momento in cui il suolo risulta essere completamente svuotato. Il valore di  $k_r$  viene stimato a partire dalla quantità d'acqua cumulata che può essere allontanata per evaporazione (depletion) che viene correlata alle capacità massima di contenimento dell'acqua nel terreno (capacità di campo) e all'umidità del terreno oltre la quale la pianta appassisce (punto di appassimento). L'espressione proposta dalla FAO è la seguente:

$$TEW = 1000(\vartheta_{FC} - 0,5 \vartheta_{WP}) Z_e$$

Nella quale:

- $\vartheta_{FC}$  è il contenuto d'acqua massimo trattenibile dal terreno per gravità [-]
- $\vartheta_{WP}$  contenuto d'acqua al punto di appassimento delle piante [-]
- $Z_e$  profondità dello strato di suolo soggetto a processi evaporativi [m]

In fig. 1.8 è riportato un esempio dell'andamento di  $k_r$ .

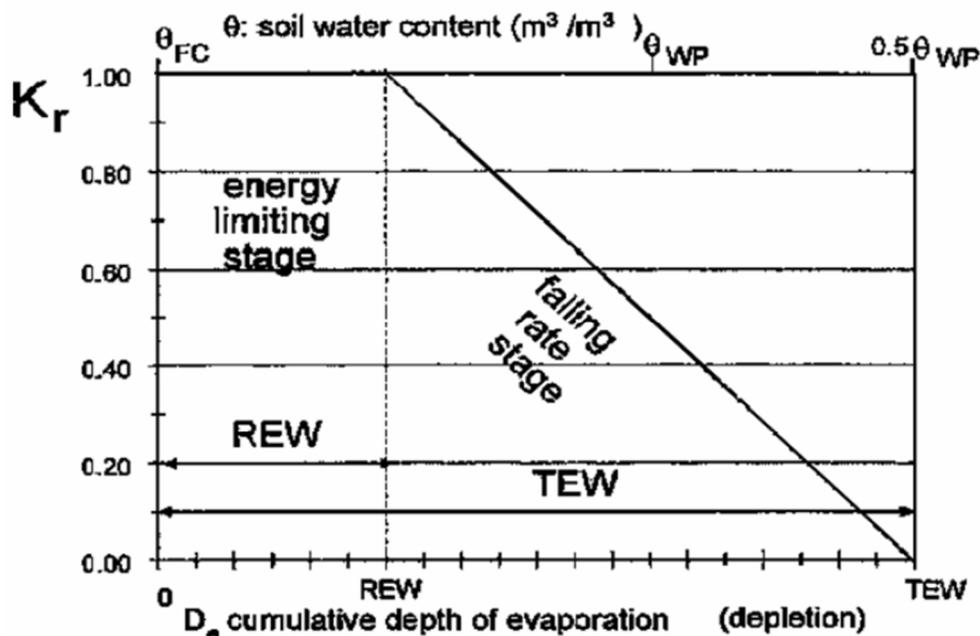


Fig. 1.8 – Andamento temporale del coefficiente  $k_r$

Infine la frazione di suolo esposta all'evaporazione è data da:

$$f_{ew} = 1 - f_c$$

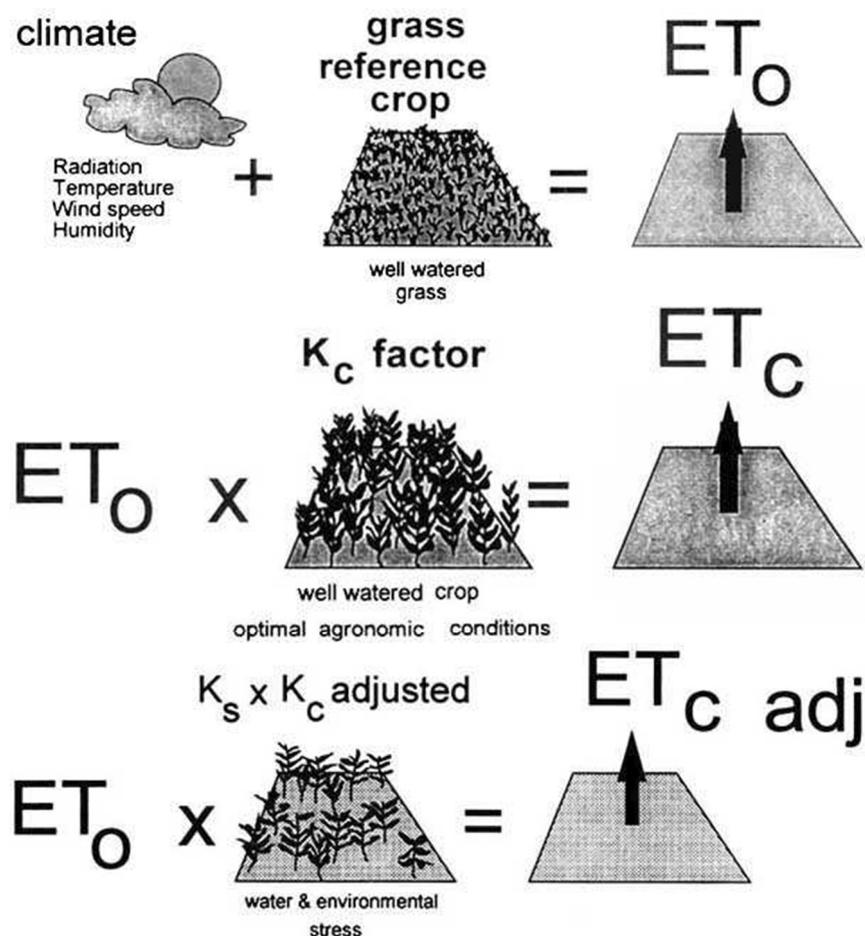
Nella quale  $f_c$  è la porzione di territorio coperta dalla vegetazione.

### 1.2.3.7 Traspirazione in condizioni di stress idrico

$ET_c$  rappresenta la domanda d'acqua imposta dall'ambiente alla coltura. A questa domanda fa riscontro l'offerta di acqua che eguaglia la domanda solo nel caso di copertura completa del terreno da parte delle piante e di abbondante disponibilità idrica e che, in caso contrario, è inferiore. Infatti, fattori quali la salinità, la scarsa fertilità del terreno, l'applicazione limitata di fertilizzanti, la presenza di strati duri e impermeabili, l'assenza di controllo di malattie e parassiti ed una cattiva gestione del suolo possono limitare lo sviluppo del raccolto e ridurre l'evapotraspirazione. Altri fattori da prendere in considerazione quando si valuta l'ET sono la copertura del suolo, la densità della pianta e il contenuto di acqua del suolo. L'effetto di quest'ultimo su ET è condizionato principalmente dall'entità del deficit idrico e dal tipo di suolo. Di contro, troppa acqua provoca ristagno che potrebbe danneggiare la radice e limitare l'assorbimento di acqua inibendo la respirazione della pianta stessa. Inoltre, variabili climatiche come velocità e umidità del vento o particolari pratiche colturali possono portare ad una variazione di ET.

Laddove le condizioni del campo differiscono dalle condizioni standard, sono necessari fattori di correzione per regolare  $ET_c$ . La regolazione riflette l'effetto sull'evapotraspirazione delle colture delle condizioni ambientali e di gestione del campo.

Fatte le dovute premesse, la FAO, applicando un coefficiente correttivo di stress idrico ( $k_s$ ) anch'esso fornito dalla FAO, è possibile passare da  $ET_c$  in condizioni standard ad  $ET_c$  in condizioni non standard ( $ET_{c\ adj}$ ). In fig. 1.9 si riporta lo schema grafico riepilogativo del modello FAO per il calcolo di  $ET_{c\ adj}$ .



**Fig. 1.9 – Schema calcolo  $ET_0$ ,  $ET_c$ ,  $ET_{c\ adj}$  tramite il modello FAO**

Nel caso di stress della coltura dovuto unicamente alla mancanza d'acqua, la FAO propone due modelli per il calcolo del coefficiente  $k_s$ . La differenza tra le due consiste nell'includere nel moltiplicare il coefficiente per  $k_{cb}$  o direttamente  $k_c$  a seconda che si siano divisi i contributi nella determinazione di  $k_c$ .

In sostanza si ha:

- Primo metodo:

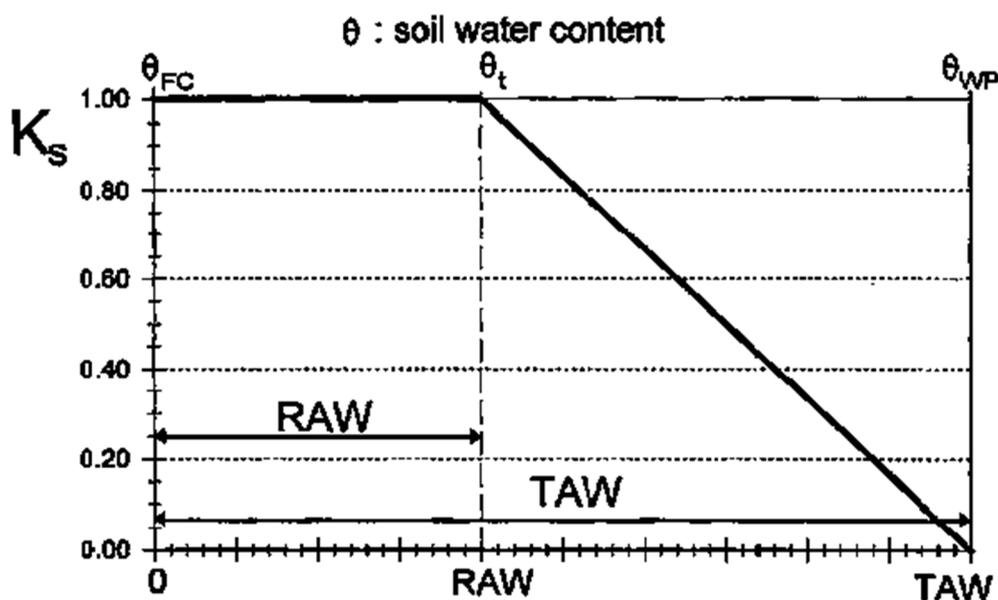
$$ET_{c\ adj} = (k_s k_{cb} + k_e) ET_0$$

- Secondo metodo:

$$ET_{c\ adj} = k_s k_c ET_0$$

Tra le due metodologie proposte, la FAO indica il primo metodo come il più preciso in quanto il coefficiente  $k_s$  dovrebbe avere effetto unicamente sulla traspirazione e non anche sull'evaporazione dal suolo.

Per quanto riguarda il calcolo di  $k_s$ , questo dipende dal contenuto di acqua nel terreno. Quest'ultimo può essere valutato anche tramite il parametro  $D_r$  (root zone depletion) che corrisponde al quantitativo d'acqua mancante per il raggiungimento della capacità di campo. In sostanza, in corrispondenza della capacità di campo,  $D_r$  ha valore nullo; nel momento in cui l'acqua contenuta nel terreno è estratta per evapotraspirazione il suo valore aumenta ma la condizione di stress idrico inizia viene raggiunta nel momento in cui  $D_r$  diventa raggiunge il valore RAW. Una volta superato il valore di RAW,  $D_r$  ha un valore sufficiente per limitare l'evapotraspirazione a valori inferiori rispetto a quella potenziale e pertanto il coefficiente  $k_s$  assume valori inferiori rispetto all'unità con una diminuzione ipotizzata lineare rispetto al contenuto d'acqua. Quanto appena esposto è riassunto graficamente in fig. 1.10.



**Fig. 1.10 – Variazione del coefficiente di stress idrico in funzione del contenuto d'acqua nel terreno  $\theta$  e del parametro  $D_r$**

I valori di TAW (total available water) e RAW (ready available water) vengono determinati tramite le seguenti equazioni:

$$TAW = 1000(\vartheta_{FC} - 0,5 \vartheta_{WP}) Z_r$$

Nella quale:

- $\vartheta_{FC}$  è il contenuto d'acqua massimo trattenibile dal terreno per gravità [-]
- $\vartheta_{WP}$  contenuto d'acqua al punto di appassimento delle piante [-]
- $Z_r$  profondità delle radici [m]

$$RAW = p TAW$$

Nella quale  $p$  è la frazione media di TAW che può essere assorbita dalla zona radicale prima del raggiungimento dello stress idrico (punto  $\theta_t$ ). Il valore di  $p$  varia in funzione del valore di  $ET_c$  e del tipo di coltura: varia tra 0.30 per apparati radicali di bassa profondità ad elevati tassi di  $ET_c$  ( $> 8 \text{ mm d}^{-1}$ ) e 0.70 per apparati radicali di elevata profondità a bassi tassi di  $ET_c$  ( $< 3 \text{ mm d}^{-1}$ ); viene fornito dalla stessa FAO in forma tabellare.